

Wechselwirkungseffekte eines Cäsium-BEC in eindimensionalen Gittern

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Magisters der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Ing. Manfred Johann Mark

unter der Betreuung von
a. Univ.-Prof. Dr. Hanns-Christoph Nägerl

Institut für Experimentalphysik
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Innsbruck, November 2007

Danksagungen

Mein erster Dank gilt meinen Betreuer Hanns-Christoph, dem 'Chef' unseres Experiments. Er ermöglichte mir dieses spannende und interessante Diplomarbeitsthema und stand mir immer mit Rat und gelegentlich auch Tat bei etwaigen Problemen zur Seite. Ebenfalls ein großes Danke gilt unserem 'Big Boss' Rudi, der hier in Innsbruck ein großartig arbeitendes Team um sich versammelt hat, das sich vor einem internationalen Vergleich nicht zu scheuen braucht.

Wesentlich zum Erfolg dieser Arbeit haben die beiden Senior-Doktoranten im Labor, der 'alte Schwede' Matthias und der nicht ganz so alte Meister der Klimaanlage Elmar beigetragen. Diese beiden sind maßgeblich dafür verantwortlich, dass unser Experiment nach einer harten Aufbauzeit nun in die Phase kommt, in der die ersten 'Früchte' geerntet werden können. Ich konnte viel von ihrem Wissen und physikalischem Verständnis lernen, und das hervorragende Arbeitsklima im Labor entschädigte für so manche Rückschläge, die in diesem Jahr natürlich ebenso vorkamen. Danke! Der 'jüngste' Neuzugang im Team, der ausgewachsene Mediziner Hans, sorgte zwar mit seinen zusätzlichen Aufbauten zunächst für eine weitere Verringerung des schon spärlichen Laborraumes :-), trotzdem ist er eine ausgesprochene Bereicherung für das Team und hat sich, nicht nur durch seine maßgebliche Hilfe bei Planung und Bau des Resonators, ein großes Danke verdient.

Natürlich wäre die ganze Laborarbeit nicht möglich ohne die elektronische wie auch mechanische Grundaustattung. Darum besonderes Dankeschön unseren beiden Elektronikern Manuel und Arthur, denn ohne sie würden die Labors vermutlich noch mit Röhrenverstärkern ausgestattet sein. Ebenso leistet unsere Werkstatt hervorragende Arbeit, vor allem Toni und Helmut sei gedankt, die immer wieder erstaunliches aus ihren Maschinen herausholen und auch zwischendurch mal schnell was 'einschieben' können.

Ein Danke geht auch an alle weiteren Kollegen in unserer Gruppe, den administrativen 'Chefs' Christine, Karin und Gabriel und natürlich auch den 'Blatts', hier insbesondere Piet und Max. Mein besonderer Dank gilt auch Johannes, der mir mit seinem Empfehlungsschreiben meinen Forschungsaufenthalt in Irland - gesponsert von UREKA - ermöglicht hat.

Nicht unerwähnt dürfen meine Studienkollegen Wolfgang, Matthias, Markus, Andreas, Andrea, Harald, Lukas, Gerd und Tobias bleiben, mit denen ich den Großteil des Physikstudiums verbrachte. Die gemeinsamen Lernsessions, die oftmals heißen Diskussionen über Physik und das ein oder andere Bier nach erfolgreich bestandenen Klausuren haben einen nicht unerheblichen Anteil am erfolgreichen Abschluss dieses Studiums.

Danke auch an unseren lieben Vater Staat, der mir durch Bewilligung des Selbsterhalterstipendiums das Studium finanziell ermöglichte. Ebenso möchte ich holly für die kontinuierliche Versorgung mit Kaffee und dem Papa Jollys für ihre sehr angenehmen Bierpreise danken, damit wurden die Qualen des Studiums deutlich gemildert.

Daran, dass das Leben nicht nur aus dem Physikstudium besteht, haben mich meine Familie sowie meine Freunde neben der Uni (auch die gibt es noch) immer wieder erinnert. Besonders Florian und seiner nunmehrigen Frau Chitra, mit denen ich in den letzten Jahren die Wohnung geteilt habe, möchte ich danken, vor allem in Erinnerung an die vielen erfolglosen Versuche meinerseits, ihr Interesse an Physik durch spannende Erzählungen aus dem Reich der Quantenphysik zu wecken. Gedankt sei auch allen Helfern der letzten Übersiedlungsaktion, besonders Simon (danke für den Fernseher!) sowie Simon und Michael (das Küchenteil bleibt für immer drin).

Danke Amba, dass du immer für mich da warst - und dass du mich im letzten Jahr ausgehalten hast!

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Ultrakalte Quantengase	3
2.1 Ultrakalte Stoßprozesse	3
2.1.1 Elastische Zwei-Körperstöße	4
2.1.2 Inelastische Drei-Körperstöße	4
2.2 Feshbach-Resonanzen	5
2.3 Bose-Einstein Kondensation	8
2.3.1 BEC ohne Wechselwirkung	9
2.3.2 BEC mit schwacher Wechselwirkung	10
3 Der Weg zum Cäsium-BEC	13
3.1 Dipolfallen	13
3.1.1 Dipolpotential	13
3.1.2 Gekreuzte Dipolfalle	15
3.1.3 1D optisches Gitter	15
3.2 Aufbau der Experimentapparatur	17
3.3 MOT und Raman-Seitenbandkühlen	17
3.4 Reservoir-Dipolfalle	19
3.5 Der Dimple-Trick und Evaporation	20
4 Atominterferometer	23
4.1 Atom-Licht Wechselwirkung	23
4.1.1 Kapitza-Dirac-Regime	24
4.1.2 Bragg-Regime	25
4.1.3 Abschätzung der experimentellen Parameter	27
4.2 Interferometerkonfigurationen	29
4.2.1 Mach-Zehnder Interferometer	29
4.2.2 Kontrastinterferometer nach Gupta	31
4.3 Präzisionsmessungen	33

Inhaltsverzeichnis

4.3.1	Bestimmung der Feinstrukturkonstante	33
4.3.2	Abschätzung der Fehlerquellen	35
4.4	Experimenteller Aufbau	36
4.4.1	Master-Laser	38
4.4.2	Frequenzstabilisierung	39
4.4.3	Slave-Laser	41
4.4.4	Gitterstrahlaufbau und Detektion	42
5	Bloch-Oszillationen	43
5.1	Bandstruktur und Wannier-Funktionen	44
5.1.1	Bandstruktur und Bloch-Funktionen	44
5.1.2	Wannier-Funktionen	46
5.2	BEC im optischen Gitter	47
5.2.1	1D-Näherung der Gross-Pitaevskii-Gleichung - NPSE	47
5.2.2	Diskrete 1D-Näherungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung	48
5.2.3	Grundzustand des BECs im Gitter	50
5.3	Numerische Simulation	51
5.4	Bloch-Oszillationen	54
5.4.1	Dephasingmechanismen	55
5.4.2	BO im harmonischen Gitter	56
5.5	Durchgeführte Messungen	56
5.5.1	Präzisionsmessungen bei verschwindender Wechselwirkung	58
5.5.2	Dephasierung der BO durch Wechselwirkung	61
5.5.3	Dephasing und Revival im harmonischen Potential	65
6	Zusammenfassung und Ausblick	69
A	Veröffentlichung im Rahmen dieser Diplomarbeit	71
B	Matlab-Code Simulation der NPSE	77
C	Matlab-Code Simulation der DNLSE/DNL/DNPSE	81
	Literatur	86

KAPITEL 1

Einleitung

Mit der Erzeugung der ersten Bose-Einstein Kondensate in verdünnten Gasen aus ^{87}Rb -Atomen [And95] und ^{23}Na -Atomen [Dav95] im Jahr 1995 wurde die Tür für eine große Vielfalt an Experimenten im Forschungsgebiet der ultrakalten Quantengase geöffnet. Zunächst stand die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften eines Bose-Einstein Kondensates (BEC) wie z.B. die Interferenz von Materiewellen [And97] oder die Erzeugung von Materiewellen-Vortizes [Mat99] im Vordergrund. Bald darauf gelang es, BECs in optische Gitterpotentiale einzuladen [And98, Bur01, Cat01]. Damit wurde die Tür zur experimentellen Untersuchung von festkörperphysikalischen Effekten mit Hilfe der Atomphysik aufgestoßen. Ein erster Höhepunkt war die Beobachtung des Quantenphasenüberganges vom suprafluiden BEC zum Mott-Isolator [Jak98, Gre02]. Doch nicht nur der externe Einschluss, sondern auch die Wechselwirkung der Atome untereinander kann kontrolliert werden. Mit der erstmaligen Erzeugung ultrakalter Moleküle [Her03, Reg03, Joc03b] an sogenannten Feshbach-Resonanzen wurde das neue Gebiet der ultrakalten Molekülphysik erschlossen. Eine Vielzahl von neuartigen Experimenten ist damit möglich geworden, so z.B. die Erzeugung von molekularen BECs [Joc03a, Gre03] aus gepaarten Fermionen, die Untersuchung des sogenannten BEC-BCS Crossovers [Bar04], die Paarbildung in optischen Gittern [Win06] und die Erzeugung exotischer Dreikörper-Molekülzustände [Kra06]. Auch das Gebiet der Atominterferometrie profitierte von den Möglichkeiten der Manipulation ultrakalter Atomwolken durch optische Gitter [Kas91]. Die Verwendung eines BEC in diesem Gebiet [Tor00, Gup02] zeigte jedoch den starken Einfluss der Wechselwirkung zwischen den Atomen, die im BEC durch dessen hohe Dichte besonders ausgeprägt ist. Dies verhinderte bislang die Verwendung von BECs für Präzisionsmessungen in diesem Bereich.

Während die Bose-Einstein Kondensation mit weiteren Alkali-Metallen nach 1995 relativ schnell erreicht wurde, dauerte es für ^{133}Cs bis 2003 [Web03b], ehe die erfolgreiche Kondensation gefeiert werden konnte. Grund dafür sind die hohen inelastischen Zwei-Körper-Verluste, die Cs in den magnetisch fangbaren Zuständen aufweist [Söd98]. Daher muß Cs im Gegensatz zu den anderen Alkalimetallen zuerst in den atomaren Grundzustand präpariert werden, welcher nicht magnetisch fangbar ist. Die Kondensation findet daher in optischen Dipolfallen statt. Das Interesse an einem BEC aus Cs-Atomen bestand anfänglich zunächst aufgrund der Definition der Sekunde als der Dauer von 9,192,631,770 Schwingungen des Hyperfeinübergangs [Sal00]. Das heutige Interesse an einem BEC mit Cs beruht allerdings eher auf der vielfältigen

1 Einleitung

molekulare Struktur, die sich in einer Vielzahl von *Feshbach-Resonanzen*, vor allem in einem technisch leicht zu erreichenden Magnetfeldbereich von einigen zehn Gauss, zeigt. Für Cs ergibt sich somit die einzigartige Möglichkeit, die Stärke der atomaren Wechselwirkung mithilfe externer Magnetfelder [Chi01] einfach und präzise abzustimmen. Der Effekt der Wechselwirkungen lässt sich gezielt vermessen bzw. für zukünftige atominterferometrische Präzisionsmessungen nahezu auf Null stellen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Untersuchung sowie Unterdrückung der Wechselwirkungseffekte eines Cs-BEC in optischen Gittern durchgeführt. Zunächst wurde ein Konzept für ein Atominterferometers erstellt, welches primär zur Präzisionsmessung der Feinstrukturkonstante α verwendet werden kann [Gup02]. Dabei ist vor allem die Untersuchung des systematischen Fehlers durch die Wechselwirkung ein wichtiger Schritt. Der Großteil des optischen Aufbaues wurde bereits durchgeführt und kann in kurzer Zeit vervollständigt werden, um erste Messungen durchzuführen. Die detaillierte Untersuchung des faszinierenden Phänomens der Bloch-Oszillationen (BO) [BD96] eines BECs in einem vertikalen Gitter unter Einfluss der Schwerkraft stellt den zweiten Bereich meiner Arbeit dar. Wir konnten zunächst einen neuen Rekord in der Anzahl der nachgewiesenen Oszillationsperioden aufstellen, indem wir die Wechselwirkung des Cs-BECs auf Null stellten. Dadurch konnte wiederum das zur Ausschaltung der Wechselwirkung benötigte Magnetfeld mit einer bisher nicht erreichten Genauigkeit vermessen werden. Der Einfluss der Wechselwirkung auf die BO wurde quantifiziert und mit Hilfe von numerischen Simulationen qualitativ nachgebildet. Auch die theoretisch vorhergesagten Breakdown- und Revival-Phänomene von BO bei Präsenz eines zusätzlichen vorhandenen harmonischen Potentials wurden erstmals nachgewiesen.

In dieser Arbeit möchte ich zunächst in Kapitel 2 die wichtigsten Punkte über das grundlegende Verhalten von atomaren Gasen - insbesondere Cäsium - bei ultrakalten Temperaturen wiederholen und in Kapitel 3 den Aufbau unserer Messapparatur und die Erzeugung des Cs-BECs beschreiben. In Kapitel 4 werde ich zunächst die Theorie der Bragg-Spektroskopie und darauf aufbauend die Idee der Atominterferometrie erklären. Anschließend werde ich über den Aufbau des Lasersystems berichten, welches vorrangig zur Realisierung eines Atominterferometers konzipiert wurde. Dieses Lasersystem kann natürlich auch für eine Vielzahl von anderen Messungen wie z.B. Charakterisierung der Impulsverteilung des BEC [Koz99] oder weitere Varianten der Bragg-Spektroskopie [Mek07] eingesetzt werden. In Kapitel 5 gehe ich genauer auf die theoretischen Grundlagen der BO [Blo29] und ihre Realisierung mithilfe von optischen Gittern und kalten Atomen ein. Anschließend berichte ich über die in unserer Gruppe durchgeführten Untersuchungen des Verhaltens der BO abhängig von der Wechselwirkung. Im Kapitel 6 werde ich eine kurze Zusammenfassung über die wesentlichsten Inhalte und Erkenntnisse dieser Arbeit erstellen. Anschließend gebe ich einen Ausblick auf weitere Messungen, die in Kürze durchgeführt werden. Dabei sind die schon begonnene Untersuchung des Überganges vom Suprafluiden Zustand zum Mott-Isolator Zustand in einem 3D-Gitter als Funktion der Streulänge sowie die Beobachtung von BO in einem 3D-Gitter die nächsten Schritte.

KAPITEL 2

Ultrakalte Quantengase

Ein verdünntes Gas bei Raumtemperatur kann in der Regel rein klassisch betrachtet werden und zeigt keinerlei quantenmechanisches Verhalten. Mithilfe der sogenannten Laserkühlung [Met99] ist es möglich, Gase in einen Temperaturbereich zwischen $\sim 1\text{mK}$ und $\sim 1\mu\text{K}$ abzukühlen, sodass man das Gebiet der **kalten Stöße** [Wei99] erreicht. Hier spielt die Quantennatur der Atome eine wichtige Rolle. Ein wesentlicher Parameter dabei ist die de Broglie Wellenlänge, die als

$$\lambda_{db} = \frac{h}{p} \quad \text{mit } p = \sqrt{2mE} \quad (2.1)$$

definiert ist und ein Maß für die Ausdehnung des Wellenpaketes, welches ein Atom beschreibt, darstellt. In Bereich der kalten Stöße liegt die de Broglie Wellenlänge bereits in der Größenordnung der charakteristischen Länge chemischer Bindungen. Kühlt man die Atome z.B. durch Verdampfungskühlung noch weiter ab, kommt man in das Regime der **ultrakalten Stöße**. Hier wird die de Broglie Wellenlänge vergleichbar mit dem Abstand der Atome im Gas. Im folgenden werde ich mich auf die genauere Betrachtung der ultrakalten Stöße beschränken, da alle betrachteten Stoßprozesse in dieser Arbeit in diesem Bereich stattfinden.

Im Allgemeinen können zwischen den Atomen entweder *elastische* oder *inelastische* Stöße auftreten. Bei den *inelastischen* Stößen wird der innere Zustand der Stoßpartner verändert, sodass zusätzliche kinetische Energie frei wird, während bei *elastischen* Stößen nur eine Umverteilung der kinetischen Energie und dadurch eine sogenannte Thermalisierung stattfindet. Bei Präparation der Atome im absoluten Grundzustand finden im Regime der ultrakalten Stöße im Allgemeinen nur noch elastische Zwei-Körper-Stöße statt.

2.1 Ultrakalte Stoßprozesse

In der quantenmechanischen Streutheorie wird zur Untersuchung des Verhaltens von Kollisionen der sogenannte Partialwellenansatz verwendet. Bei niedrigen Temperaturen kommt es dank der Zentrifugalbarriere nur noch zur sogenannten s-Wellen-Streuung, bei der alle einlaufenden Partialwellen mit $l \neq 0$ nicht mehr gestreut werden können [Dal99b].

2.1.1 Elastische Zwei-Körperstöße

Das Streuverhalten wird hier allein durch die Phasenverschiebung $\delta_{l=0}(k)$ bestimmt, welche im niederenergetischen Bereich durch die s-Wellen-Streulänge

$$a = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_{l=0}(k)}{k} \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda_{db}} \quad (2.2)$$

beschrieben werden kann. Die Streulänge hängt dabei vom genauen Wechselwirkungspotential zwischen den Teilchen ab und kann sowohl positiv wie negativ sein. Positive Streulängen können als repulsive, negative als attraktive Wechselwirkung interpretiert werden [Bur02]. Bei Null Streulänge verschwindet die Wechselwirkung völlig und es findet keine Streuung mehr statt (Ramsauer-Townsend-Effekt). Bestimmend für die Streulänge ist zudem die Lage der letzten gebundenen Molekülzustände relativ zur Dissoziationsgrenze, wobei deren Einfluss ausführlich in Kapitel 2.2 diskutiert wird.

Im unserem Fall eines ultrakalten Ensembles mit identischen Cäsium-Atomen kann der effektive elastische Wirkungsquerschnitt angeschrieben werden zu

$$\sigma_{el} = \frac{8\pi a^2}{1 + k^2 a^2} \quad (2.3)$$

welcher im Fall eines ultrakalten Gases bei hinreichend niedriger Streulänge $k \cdot a \ll 1$ den *niederenergetischen Limes* $\sigma_{el} = 8\pi a^2$ ergibt.

2.1.2 Inelastische Drei-Körperstöße

Durch die in unserem Experiment während des Raman-Kühlens (siehe Kapitel 3.3) im absoluten elektronischen Grundzustand präparierten Atome sind inelastische Zwei-Körperstöße nicht möglich. Dadurch kommt die Drei-Körper-Rekombination [Web03b] als nächstgrößter Prozess ins Spiel. Dabei bilden zwei Atome ein Molekül und übertragen dem dritten Atom einen Teil der Bindungsenergie als kinetische Energie. Dadurch kommt es je nach Falltiefe und Bindungsenergie zu einem Teilchenverlust bzw. Heizen. Generell hängt dieser Prozess von der Teilchendichte und von einem Verlustkoeffizient L_3 ab:

$$\frac{\dot{N}}{N} = -L_3 \langle n^2 \rangle \quad \text{mit} \quad L_3 = n_l C(a) \frac{\hbar}{m} a^4 \quad (2.4)$$

Der Verlustkoeffizient skaliert im *universellen Regime* ($a \gg l_{vdW}$)¹ mit der vierten Potenz der Streulänge, wobei der Vorfaktor $C(a)$ ein Abweichen von diesem allgemeinen Verhalten aufgrund schwach gebundener Dreikörper-Zustände, sogenannter Efimov-Zustände [Efi71], inkludiert. Der Verlauf dieses Vorfaktors wurde für ein ultrakaltes Cäsium-Gas im Bereich von $-2000 a_0$ bis $1500 a_0$ detailliert gemessen und zeigte einerseits eine resonante Überhöhung bei $-850 a_0$ sowie ein lokales Minimum bei $210 a_0$

¹Die van-der-Waals-Länge l_{vdW} beträgt bei Cäsium ca. $101 a_0$

des Verlustkoeffizienten [Kra06]. Die resonante Überhöhung der Dreikörperverluste ist ein eindeutiges Indiz für einen gebundenen Efimov-Zustand, der bei dieser Streulänge an den Streuzustand koppelt. Das Minimum bei $210 a_0$ kann durch destruktive Interferenz verschiedener Dreikörper-Ausgangskanäle erklärt werden [Nie99].

2.2 Feshbach-Resonanzen

Feshbach-Resonanzen [Fes62] wurden zum ersten Mal in der Kernphysik zur Beschreibung eines resonanten Verhaltens in der Streuung von Atomkernen durch das Vorhandensein innerer Zustände eingesetzt. Dieses Konzept wurde mit Erfolg auf die auftretenden Resonanzen in der Streuung ultrakalter Atome umgelegt [Tie92]. Dabei kommt es zu einer Resonanzstruktur in der Streulänge, sobald das Energieniveau eines gebundenen Molekülzustandes und das asymptotische Energieniveau des einlaufenden Streuzustandes nahezu gleich sind. Durch die Kopplung zwischen den beiden Zuständen können die Atome kurzzeitig im gebundenen Zustand sein, wodurch die Streueigenschaften stark verändert werden. Die Streulänge wird dabei groß und positiv, wenn solch ein gebundener Zustand knapp unterhalb der Streuzustandsenergie liegt, sowie groß und negativ, wenn er knapp überhalb der Streuzustandsenergie liegt. Liegt der Molekülzustand genau auf der Streuzustandsenergie, divergiert die Streulänge, wie in Abbildung 2.1 dargestellt.

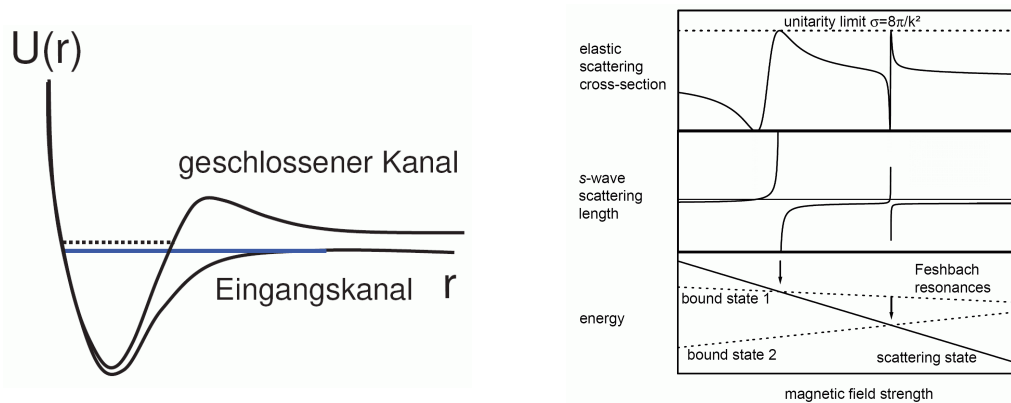


Abbildung 2.1: Modell für eine Feshbach-Resonanz. *links*: Die Potentialkurven des Eingangskanals (Streuzustand) und des geschlossenen Kanals mit dem (gebundenen) Molekülzustand (strichliert). Bei Entartung der Energieniveaus ergibt sich eine Feshbach-Resonanz. *rechts*: Beispielhafte Energieniveaus zweier Molekülzustände im Vergleich zum Streuzustand abhängig vom externen Magnetfeld. Darüber sind die sich daraus ergebende Streulänge und der elastische Wirkungsquerschnitt aufgetragen. Entnommen aus [Chi01]

2 Ultrakalte Quantengase

Für gebundene Molekülzustände, die ein anderes magnetisches Moment als die freien Atome besitzen, kann mithilfe eines externen Magnetfeldes das gebundene Energieniveau in Relation zum Energieniveau des Streuzustandes verschoben werden und damit eine *magnetische Feshbach-Resonanz* [Tie93] herbeigeführt werden. In der Nähe einer solchen Feshbach-Resonanz verhält sich die Streulänge wie

$$a(B) = \bar{a} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right) \quad (2.5)$$

Dabei ist \bar{a} die sogenannte Hintergrunds-Streulänge, ΔB bezeichnet die Breite der Resonanz und hängt im wesentlichen vom Produkt $W \cdot \Delta\mu$ der Kopplungsstärke W der beiden Zustände und der Differenz der magnetischen Momente $\Delta\mu$ ab. B_0 bezeichnet die Position der Resonanz. Aufgrund der für Cäsium besonders starken relativistischen Wechselwirkungen (z.B. Spin-Spin-Dipol und 2. Ordnung Spin-Orbit) ergibt sich eine Vielzahl unterschiedlich breiter Feshbach-Resonanzen im Bereich kleiner Magnetfelder. Die Benennung der einzelnen Resonanzen wird auf Basis des Bahndrehimpulses $l=0,2,4,\dots$ der zugrundeliegenden Molekülzustände mit s,d,g,... bezeichnet. Cäsium bietet mit seiner breiten Feshbach-Resonanz bei ≈ -11 G die einzigartige Möglichkeit, mit relativ kleinen magnetischen Feldern die Streulänge im Bereich von $-2500 a_0$ bis $1500 a_0$ zu variieren (siehe Abbildung 2.2) und vor allem bei ≈ 17 G auf Null zu stellen.

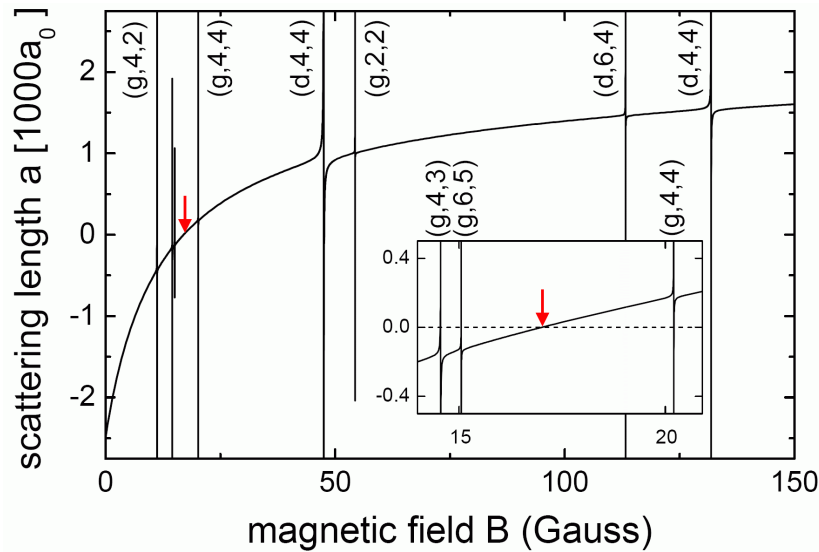


Abbildung 2.2: Streulänge als Funktion des angelegten Magnetfeldes. Das allgemeine Verhalten wird von einer breiten s-Wellen-Resonanz bei ≈ -11 G bestimmt, die schmale Feshbach-Resonanz bei ≈ 48 G ergibt sich durch eine Kopplung an einen d-Wellen Molekülzustand. Die sehr schmalen Resonanzen durch Kopplung an g-Wellen-Zustände liegen bei 11.0, 14.4, 15.0, 19.9 und 53.5 G. Der Pfeil deutet den Nulldurchgang der Streulänge bei ≈ 17 G an. Entnommen aus [Her05].

Feshbach-Moleküle

Mithilfe der schmalen Feshbach-Resonanzen können im Experiment gezielt Moleküle mit einem bestimmten Bahndrehimpuls, sogenannte *Feshbach-Moleküle*, erzeugt werden. Eine etablierte Methode zur Erzeugung der Moleküle ist der dynamische Transfer der Atome mithilfe einer Magnetfeldrampe vom Streuzustand in den Molekülzustand wie in Abbildung 2.3 dargestellt.

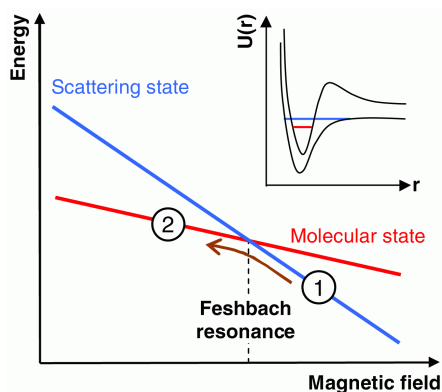


Abbildung 2.3: Erzeugung von Feshbach-Molekülen: Durch adiabatisches Rampen des Magnetfeldes von (1) nach (2) werden die Atome vom Streuzustand in den schwach gebundenen Molekülzustand transferiert.

Angewendet auf ein BEC kann dadurch ein molekulares Ensemble mit hoher Phasenraumdicke erzeugt werden. BEC-Eigenschaften wie Kohärenz und Suprafluidität sollten ebenfalls auf die Moleküle übergehen. Die Konversionseffizienz von Atomen zu Molekülen hängt von der anfänglichen Dichte sowie von der Art und Weise der Magnetfeldrampe ab [Mar05]. Der limitierende Faktor bei der Erzeugung sind inelastische Atom-Molekül- und Molekül-Molekül-Stöße, die zu einer Zerstörung der Moleküle und anschließend zu einem Teilchenverlust führen.

Eine Möglichkeit, die erzeugten Moleküle nachzuweisen, ist die Trennung von Atomen und Molekülen in einem Stern-Gerlach Experiment aufgrund des unterschiedlichen magnetischen Momentes. Danach werden die Moleküle durch eine Magnetfeldrampe in umgekehrter Richtung wieder dissoziiert und anschließend als Atome detektiert. Dies ermöglicht eine Vielzahl interessanter Experimente, wie z.B. die Erforschung der tiefer gebundenen Molekülzustände [Her05] sowie Interferometrie mit verschiedenen Molekülzuständen [Mar07].

Die Erzeugung von Feshbach-Molekülen konnte auch mit Fermionen durchgeführt werden, wobei hier im Unterschied zu Bosonen die Moleküle äußerst stabil gegen Stöße sind [Joc03b]. Die Ursache hierfür liegt im Pauli-Prinzip, das zu einer Unterdrückung der Stoßrelaxation führt [Pet04]. Dies führte 2003 zur Erzeugung des ersten molekularen BECs in Innsbruck und Boulder, USA [Joc03a, Gre03]. Damit wurde die

2 Ultrakalte Quantengase

Möglichkeit eröffnet, den Übergang eines BEC zu einer Supraflüssigkeit aus Cooper-Paaren eingehender zu studieren [Bar04]. Dieses relativ neue Forschungsgebiet wird derzeit mit großer Aufmerksamkeit beobachtet, vor allem in Hinblick auf neue Erkenntnisse z.B. für die Hochtemperatur-Supraleitung.

2.3 Bose-Einstein Kondensation

S. Bose entwickelte 1924 als erster ein statistisches Modell zur Beschreibung der Plank'schen Schwarzkörperstrahlung. A. Einstein verallgemeinerte dieses Modell für alle bosonischen Teilchen. Er entdeckte, dass in einem Gas aus Bosonen bei fallender Temperatur ab einer gewissen Grenztemperatur die Besetzung des normalerweise nur gering bevölkerten Grundzustands des Systems plötzlich anwächst. Diese *makroskopische* Besetzung des Grundzustandes ist neben fest, flüssig und gasförmig ein vierter möglicher Zustand von Materie und zeichnet sich dadurch aus, dass er durch eine einzige makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden kann.

Zur quantitativen Beschreibung eignet es sich, die *Phasenraumdichte* ρ einzuführen:

$$\rho = n\lambda_{dB}^3 \quad (2.6)$$

Dabei ist n die Dichte der Atome und λ_{dB} die de Broglie Wellenlänge (siehe Gleichung 2.1). Die Phasenraumdichte ist ein Maß für den Überlapp zwischen den Wellenfunktionen einzelner Atome im Ensemble. Ein recht anschauliches Bild zur Beschreibung des Vorganges der Bose-Einstein Kondensation ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

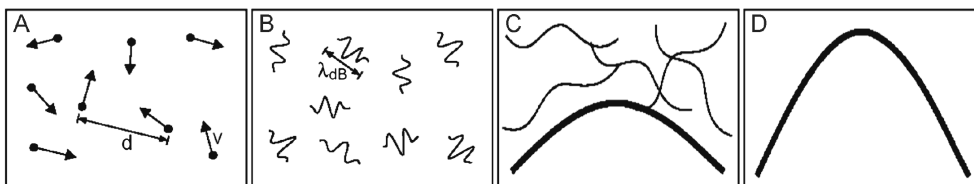


Abbildung 2.4: Phasenübergang zum BEC: (A) Bei hohen Temperaturen verhalten sich die Atome wie ein klassisches Gas. (B) Im Regime eines kalten Quantengases kann die de Broglie Wellenlänge bereits nicht mehr vernachlässigt werden. (C) Wird die de Broglie Wellenlänge gleich groß wie der mittlere Abstand der Atome, beginnt der Phasenübergang zum BEC. (D) Für $T = 0$ besetzen alle Atome den absoluten Grundzustand, ein 'reines' BEC liegt vor. Entnommen aus [Ket99]

2.3.1 BEC ohne Wechselwirkung

Die quantitative Beschreibung der Bose-Einstein Kondensation folgt direkt aus der quantenmechanischen Statistik. Die durch ein externes Potential vorgegebenen quantisierten Einteilchen-Energieniveaus ϵ_ν werden durch N identische Bosonen mit der Bose-Verteilung

$$N_\nu = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/(k_B T)} - 1} \quad \text{mit der Normierung} \quad N = \sum_\nu N_\nu \quad (2.7)$$

besetzt, wobei das chemische Potential μ bei vorgegebener Temperatur T den freien Parameter für die Normierung darstellt. Zusätzlich gilt für das chemische Potential die Beschränkung $\mu < \epsilon_\nu$, da unendliche oder negative Besetzungszahlen auszuschließen sind. Um im Grenzfall für $T \mapsto 0$ diese Divergenz zu vermeiden, ist es sinnvoll, die Summe aufzuteilen und die Besetzung des Grundzustandes ($\nu = 0$) vom sogenannten *thermischen* Anteil zu trennen.

$$N = N_0 + N_{Therm} = N_0 + \sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/(k_B T)} - 1} \quad (2.8)$$

Im Normalfall kann die Normierung zur Gänze durch den thermischen Anteil erfüllt werden, da z.B. bei Raumtemperatur die Besetzung eines einzelnen Zustandes viel kleiner als eins ist. Ab der *kritischen Temperatur* T_c kann der thermische Anteil die Normierung nicht mehr allein erfüllen und der Grundzustand beginnt sich 'makroskopisch' zu füllen. Die kritische Temperatur kann mit dem maximalen chemischen Potential ($\mu = \epsilon_0$) definiert werden als die Temperatur, bei der die Normierung gerade noch erfüllt werden kann:

$$N = N_{Therm} = \sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \epsilon_0)/(k_B T_c)} - 1} \quad (2.9)$$

Die kritische Temperatur kann nun berechnet werden, indem man diese Summe durch das Integral über die Zustandsdichte ersetzt, wobei diese natürlich vom externen Potential abhängig ist. Im Fall eines dreidimensionalen harmonischen Potentials mit der mittleren Fallenfrequenz $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$ ergibt sich die kritische Temperatur T_c und die kritische Phasenraumdichte, ab der die Kondensation einsetzt, zu

$$T_c = \frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\rho_{krit}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad \rho_{krit} \approx 1.202 \quad (2.10)$$

Der Anteil der Atome im Grundzustand ergibt sich in der harmonischen Falle zu der recht einfachen Form [Pet02]

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (2.11)$$

2 Ultrakalte Quantengase

und die Wellenfunktion des Kondensates ist die Einteilchenwellenfunktion des Grundzustandes im harmonischen Oszillator

$$\Psi(\vec{r}) = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right) \quad (2.12)$$

Durch die Heisenberg'sche Unschärferelation ergibt sich dadurch ebenfalls sofort die Breite der Impulsverteilung des BEC in die jeweilige Raumrichtung

$$\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_i} = \frac{1}{2} \sqrt{\hbar m \omega_i} \quad \text{wobei} \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}} \quad (2.13)$$

die sogenannte harmonische Oszillatorlänge in die i -te Raumrichtung ist.

2.3.2 BEC mit schwacher Wechselwirkung

Im vorherigen Abschnitt wurde nur der Fall nicht wechselwirkender Teilchen diskutiert. Im Fall eines schwach wechselwirkenden Gases ($na^3 \ll 1$) verändert sich benötigte Phasenraumdicke und kritische Temperatur zur Kondensation um ein paar Prozent, das qualitative Verhalten bleibt aber gleich [Bon02]. Das Verhalten des BECs kann allerdings nicht mehr wie im wechselwirkungsfreien Fall einfach durch die Einteilchen-Schrödinger-Gleichung beschrieben werden. Da bei einer großen Anzahl von Teilchen das Lösen der Vielteilchen-Schrödingergleichung zu komplex wird, kann mit Hilfe der Bogoliubov-Approximation [Bog47] in einem *Mean-Field*-Ansatz die sogenannte **Gross-Pitaevskii-Gleichung** abgeleitet werden [Gro61, Pit61].

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{ext}(\vec{r}) + g |\Phi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Phi(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (2.14)$$

Der nichtlineare Term ist dabei direkt proportional zur Streulänge a , repräsentiert die Wechselwirkung zwischen den Atomen und kann als zusätzliches dichteabhängiges Potential interpretiert werden. Die gesamte Gleichung hat die Form einer nichtlinearen Schrödinger-Gleichung, die sich im wechselwirkungsfreien Fall ($a=0$) auf die normale Schrödinger-Gleichung reduziert. Für die Untersuchung stationärer Lösungen kann durch Verwendung des Ansatzes $\Phi(\vec{r}, t) = \phi(r) \exp(\frac{-i\mu t}{\hbar})$ die **zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung** abgeleitet werden.

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U_{ext}(\vec{r}) + g |\phi(\vec{r})|^2 \right) \phi(\vec{r}) = \mu \phi(\vec{r}) \quad (2.15)$$

Die erste wichtige Konsequenz aus dieser Gleichung ist, dass die Wellenfunktion des BECs nicht mehr dem Einteilchen-Grundzustand des externen Potentials entspricht. Im Fall, dass die Wechselwirkungsenergie sehr viel größer ist als die kinetische Energie, kann in der **Thomas-Fermi**-Approximation der kinetische Energie-Term in der

GP-Gleichung vernachlässigt werden [Dal99a].

$$\frac{E_{int}}{E_{kin}} \gg \frac{N|a|}{\sigma_m} \quad \text{mit} \quad \sigma_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}} \quad (2.16)$$

Dabei wird σ_m als die mittlere harmonische Oszillatorlänge bezeichnet. Damit erhält man folgende Dichteverteilung für ein schwach wechselwirkendes BEC:

$$n(\vec{r}) = \frac{\mu - U_{ext}(\vec{r})}{g} \quad \text{für} \quad \mu > U_{ext}(\vec{r}), \quad \text{ansonsten} \quad n(\vec{r}) = 0 \quad (2.17)$$

Damit spiegelt die Dichteverteilung des BEC direkt das Fallenpotential wieder, im Fall eines harmonischen Einschlusses ergibt sich eine umgekehrte Parabel wie in Abbildung 2.5 dargestellt. Der Thomas-Fermi-Radius eines solchen Kondensates entspricht

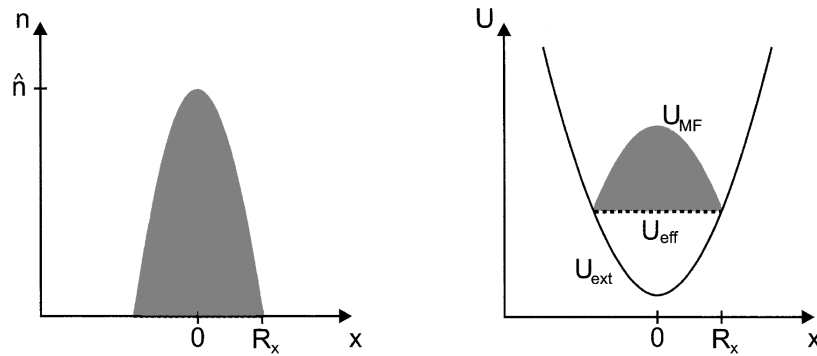


Abbildung 2.5: Thomas-Fermi-Approximation: *links*: Dichteverteilung eines BEC in Thomas-Fermi-Approximation in einer harmonischen Falle. *rechts*: Effektives Potential als Summe des externen Einschlusses und der Mean-Field-Energie. Bild entnommen aus [Bon02].

dabei dem klassischen Umkehrpunkt, an dem die Kondensatdichte verschwindet.

$$r_{TFi} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}}, \quad i = x, y, z \quad (2.18)$$

Über die Normalisierung auf eine konstante Atomzahl lässt sich das chemische Potential bestimmen:

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na}{\sigma_m} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.19)$$

KAPITEL 3

Der Weg zum Cäsium-BEC

Im Gegensatz zu den anderen Alkalimetallen sind für die Bose-Einstein Kondensation von Cäsium statt Magnetfallen vorrangig Dipolfallen im Einsatz. Nach dem Zeeman-Abbremsen und dem Fangen und Vorkühlen in einer magneto-optischen Falle (MOT) erfolgt das sogenannte Raman-Seitenbandkühlen in einem optischen Gitter. Nach Umladen in eine große Dipolfalle wird mit dem Dimple-Trick die Dichte im Gas drastisch erhöht. Die erzwungene Verdampfungskühlung findet durch Verringerung der Laserleistungen bis zur Bildung des BECs statt.

Die erste experimentelle Realisierung eines Cäsium-BEC [Web03b] und die daraus gewonnenen Erkenntnisse wurden für die Konstruktion eines neuen optimierten Aufbaus verwendet. Detaillierte Informationen und Berechnungen über den Aufbau können in den Arbeiten meiner Vorgänger [Unt05, Fli06, Kop07] nachgeschlagen werden, hier möchte ich mich auf einen kurzen Überblick beschränken.

3.1 Dipolfallen

Zum Einschluss neutraler Atome werden im Allgemeinen zwei Techniken verwendet: die magnetische Falle und die Dipolfalle. Da wir das Cäsium im elektronischen Grundzustand präparieren müssen und dieser nicht magnetisch fangbar ist (Starkfeldsucher), werden im Experiment Dipolfallen eingesetzt. Daher werde ich hier auf die von uns verwendeten Dipolfallen und das Grundprinzip eindimensionaler optischer Gitter eingehen. Eine detailliertere Betrachtung findet sich in [Gri00, Mar03, Web03a].

3.1.1 Dipolpotential

Ein Lichtfeld induziert in einem neutralen Atom ein elektrisches Dipolmoment, das wiederum mit dem Lichtfeld interagiert. Das dadurch erzeugte Potential sowie die Rate gestreuter Photonen sind dabei abhängig von der Intensität und von der Verstimmung Δ der Laserfrequenz von der nächsten Resonanzlinie des Atoms, wobei die Photonenstreuerate durch weite Verstimmung trotz hoher Intensitäten minimal gehalten werden kann.

$$U_{dip} \sim \frac{I}{\Delta} \quad \text{und} \quad \Gamma_{sc} \sim \frac{I}{\Delta^2} \quad (3.1)$$

3 Der Weg zum Cäsium-BEC

Bei genauerer Betrachtung und für den Fall eines von den zwei Cäsium-Hauptlinien ω_{D1} und ω_{D2} weit genug verstimmtten Lasers (Vernachlässigung der Hyperfeinstruktur) mit Intensitätsprofil $I(\vec{r})$ und Frequenz ω ergeben sich das effektive Potential und die Photonenstreurate zu

$$U_{dip}(\vec{r}) = -\pi c^2 I(\vec{r}) \left[\frac{\Gamma_{D1}}{2\omega_{D1}^3} \left(\frac{1}{\omega_{D1} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D1} + \omega} \right) + \frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2}^3} \left(\frac{1}{\omega_{D2} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D2} + \omega} \right) \right] \quad (3.2)$$

$$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \pi c^2 \omega^3 I(\vec{r}) \left[\frac{\Gamma_{D1}^2}{2\hbar\omega_{D1}^6} \left(\frac{1}{\omega_{D1} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D1} + \omega} \right)^2 + \frac{\Gamma_{D2}^2}{\hbar\omega_{D2}^6} \left(\frac{1}{\omega_{D2} - \omega} + \frac{1}{\omega_{D2} + \omega} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

Dabei ist Γ_{Dx} die jeweilige Linienbreite. Das Intensitätsprofil $I(\vec{r})$ eines fokussierten einmodigen Laserstrahls kann in guter Näherung mithilfe der Gauß'schen Strahlenoptik beschrieben werden.

$$I(r, z) = I_0(z) \exp\left(-2\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad \text{mit} \quad I_0(z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} \quad \text{und} \quad w(z) = \sqrt{w_0^2 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^2}} \quad (3.4)$$

Dabei ist P die gesamte Strahlleistung, $w(z)$ die Strahltaile (Waist) an der jeweiligen z -Position der Ausbreitungsrichtung und w_0 der Waist im Fokus ($z = 0$). Die Falltiefe, d.h. der tiefste Punkt des Potentials, wird üblicherweise in Einheiten der Temperatur angegeben und ergibt sich zu

$$T_{FT} = \frac{1}{k_B} \cdot \frac{2P}{\pi w_0^2} \cdot C(\omega) \quad \text{mit} \quad C(\omega) = -\frac{U_{dip}(\vec{r})}{I(\vec{r})} \quad (3.5)$$

wobei zur besseren Übersicht der rein frequenzabhängige Faktor $C(\omega)$ eingeführt wird. Für die beiden im Experiment eingesetzten Wellenlängen zur Erzeugung von Dipolfallen ergeben sich die Werte $C(1070nm) = 3.4936 \cdot 10^{-36} \text{ m}^2\text{s}$ und $C(1064nm) = 3.5663 \cdot 10^{-36} \text{ m}^2\text{s}$. Für hinreichend kleine Atomwolken und kleine Auslenkungen um das Fallenzentrum kann das Potential harmonisch genähert werden zu

$$U_{dip}(r) = \frac{-2P}{\pi w_0^2} \cdot C(\omega) \cdot \left(1 - 2\frac{r^2}{w_0^2}\right) \quad \text{und} \quad U_{dip}(z) = \frac{-2P}{\pi w_0^2} \cdot C(\omega) \cdot \left(1 - \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^4}\right) \quad (3.6)$$

woraus sofort die Fallenfrequenzen des harmonischen Oszillators abgeleitet werden können.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{8PC(\omega)}{\pi m w_0^4}} \quad \text{und} \quad \omega_z = \sqrt{\frac{4P\lambda^2 C(\omega)}{\pi^3 m w_0^6}} = \omega_r \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi w_0} \quad (3.7)$$

Im Fall nicht stark fokussierter Strahlen ($w_0 \gg \lambda$) ist der Einschluss entlang des Strahles in z -Richtung um Größenordnungen kleiner als senkrecht zum Strahl. Daher muss zum Einschluss einer Atomwolke entweder der Strahl stark fokussiert werden bzw. es müssen zwei Strahlen überlagert werden.

Nahresonante Näherung

Im Fall eines nahe zur D_2 -Linie verstimmt Lasers ($|\omega - \omega_{D1}| \gg |\omega_{D2} - \omega|$) kann durch Vernachlässigung des Einflusses der D_1 -Linie und mittels der *Rotating Wave Approximation* folgender Ausdruck für das Dipolpotential gewonnen werden

$$U_{dip}(\vec{r}) = \frac{-\pi c^2 \Gamma_{D2}}{\omega_{D2}^3 \delta} I(\vec{r}) \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{sc}(\vec{r}) = \frac{\pi c^2 \omega^3 \Gamma_{D2}^2}{\hbar \omega_{D2}^6 \delta^2} I(\vec{r}) \quad (3.9)$$

Dabei ist $\delta = \omega_{D2} - \omega$ die Verstimmung von der D_2 -Linie. Diese Gleichungen gelten nur für linear polarisiertes Licht und werden später im Kapitel 4 Anwendung finden.

3.1.2 Gekreuzte Dipolfalle

Durch Überlagerung zweier Laserstrahlen mit einem Winkel von 90° in ihrem Fokus addieren sich beide Dipolpotentiale und man spricht von einer *gekreuzten Dipolfalle*. Voraussetzung dabei ist, dass beide Strahlen nicht miteinander interferieren können, was durch geeignete Wahl der Polarisierungen und durch Verstimmung der Laserstrahlen gegeneinander erreicht werden kann. Für zwei Strahlen mit Ausbreitungsrichtungen entlang der x- und y-Achse (Strahl S1 und Strahl S2) ergeben sich die Fallenfrequenzen in die drei Raumrichtungen zu

$$\omega_x = \sqrt{\omega_{r_{S2}}^2 + \omega_{z_{S1}}^2} \quad \omega_y = \sqrt{\omega_{r_{S1}}^2 + \omega_{z_{S2}}^2} \quad \omega_z = \sqrt{\omega_{r_{S1}}^2 + \omega_{r_{S2}}^2} \quad (3.10)$$

Die gesamte Fallentiefe ergibt sich aus der Summe der einzelnen Potentiale. Da Teilchen unter der Annahme schwach fokussierter Strahlen die Falle in Richtung eines Strahles verlassen können, ist die effektive Fallentiefe diejenige des schwächsten Strahles.

3.1.3 1D optisches Gitter

Eine stehende Lichtwelle kann durch Überlagerung zweier Strahlen mit gleicher Frequenz und Polarisation, die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtungen haben, gebildet werden. Die Intensitätsverteilung der überlagerten Strahlen ergibt sich unter Annahme gleicher Strahlparameter wie Leistung und Waist zu

$$I(r, z) = 4 \cdot I_0(z) \cdot \cos^2(kz) \exp\left(-2 \frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad (3.11)$$

Dabei ist $I_0(z)$ die Intensität eines einzelnen Strahles (siehe Gleichung 3.4) und $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl. Man sieht sofort, dass die Fallentiefe pro Gittertopf viermal größer ist als noch bei einem Strahl. Bei schwach fokussierten Strahlen mit Ausbreitungsrichtungen entlang der z-Achse ergeben sich die Fallenfrequenzen in harmonischer

3 Der Weg zum Cäsium-BEC

Näherung pro Gittertopf zu

$$\omega_r = \sqrt{\frac{32PC(\omega)}{\pi m w_0^4}} = 2 \cdot \omega'_r \quad (3.12)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{16PC(\omega)k^2}{\pi m w_0^2}} \quad (3.13)$$

wobei ω'_r die Fallenfrequenz eines einzelnen Strahles darstellt. Die Fallentiefe bzw. Gittertiefe s wird üblicherweise in Einheiten der *Photonen-Rückstoßenergie*¹ $E_R = \hbar\omega_{rec} = \hbar^2 k^2 / 2m$ angegeben und ergibt sich zu

$$s = \frac{16mP}{\pi w_0^2 \hbar^2 k^2} C(\omega) \quad (3.14)$$

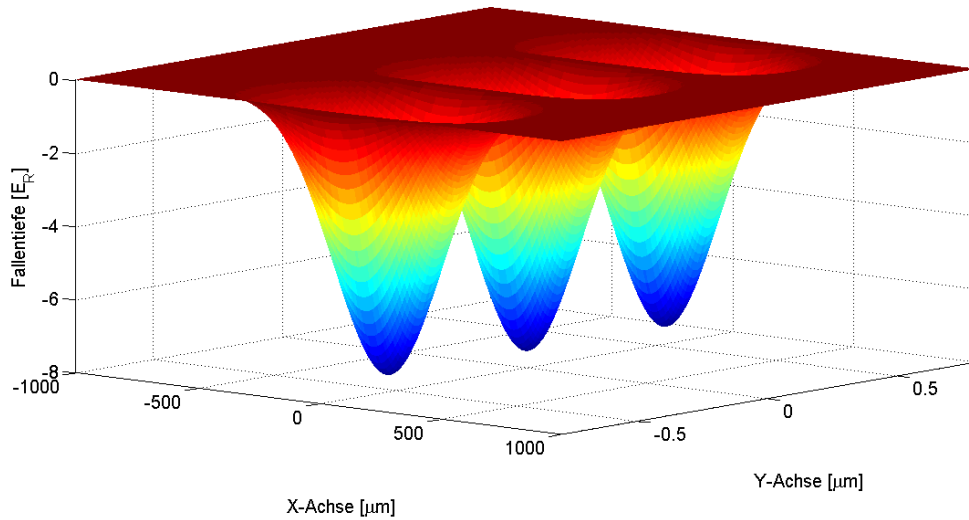


Abbildung 3.1: Berechnetes optisches 1D-Gitterpotential für zwei 1064 nm-Strahlen mit je 100 mW und einem Waist von 0.38 mm. Ausbreitungsrichtung ist dabei die Y-Achse. Die Gittertiefe sowie die Fallenfrequenzen ergeben sich zu $s = 7.2 E_R$, $\omega_r = 2\pi \cdot 4.5$ Hz, $\omega_y = 2\pi \cdot 7.1$ kHz. Das Tunnel-Matrixelement zwischen zwei Gittertöpfen (siehe Kapitel 5.1.2) beträgt $0.0375 E_R$.

¹Im Fall eines 1064 nm-Gitters ergibt sich eine Photonen-Rückstoßfrequenz von $\omega_{rec} = 2\pi \cdot 1.3$ kHz bzw. eine Photonen-Rückstoßenergie korrespondierend zu einer Temperatur von $E_R/kB = 63.6$ nK.

3.2 Aufbau der Experimentapparatur

Die Experimentapparatur kann in die zwei Hauptbereiche Ofensektion und Hauptkammer aufgeteilt werden. In Abbildung 3.2 ist der schematische Aufbau dargestellt.

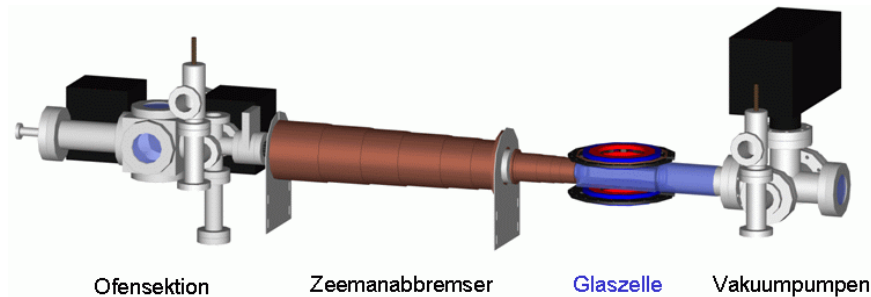


Abbildung 3.2: Aufbau der Experimentapparatur. Nach der Erzeugung eines Cäsium-Atomstrahles in der Ofensektion wird dieser im Zeeman-Abbremsler genügend stark abgebremst, um in der Glaszelle in der magneto-optischen Falle gefangen werden zu können.

Zunächst wird in der Ofensektion ein Atomstrahl aus Cäsium-Atomen erzeugt, wobei bei der konstant gehaltenen Ofentemperatur von 90°C das Maximum der Geschwindigkeitsverteilung der Atome bei ca. 260 m/s liegt. Der Atomstrahl wird danach im Zeeman-Abbremsler auf einer Gesamtlänge von 68 cm soweit abgebremst, dass gerade ein Maximum an Atomen in der eigentlichen Hauptkammer eingefangen werden kann. Diese Hauptkammer besteht aus einer Quarzglaszelle, in welcher der Druck mithilfe einer Titansublimations- und einer Ionengetter-Pumpe auf $< 10^{-11}\text{ bar}$ gehalten wird, um Heizen und Verluste durch Stöße mit dem Hintergrundgas möglichst gering zu halten.

Über und unter der Glaszelle befinden sich insgesamt vier Spulenpaare, die auf wassergekühlten Aluminiumplatten befestigt sind und die benötigten Magnetfelder erzeugen. Um den kompletten Experimentaufbau sind sechs Ausgleichsspulen angebracht, die zur Kompensation des Erdmagnetfeldes und sonstiger externer Streufelder verwendet werden.

3.3 MOT und Raman-Seitenbandkühlen

Nach dem Zeeman-Abbremsler werden die Atome in einer magneto-optischen Falle (MOT) aufgefangen. Insgesamt sechs zirkular polarisierte Strahlen und ein Quadrupol-Magnetfeld sorgen dafür, dass Atome, die sich aus dem Fallenzentrum hinausbewegen, eine Kraft in Richtung des Fallenzentrums erfahren [Met99].

Durch die Verstimmung der Laserfrequenz zu niedrigeren Frequenzen (rotverstimmt) werden die Atome gleichzeitig abgekühlt. Nach einer Ladezeit von ca. 3 s wird die

3 Der Weg zum Cäsium-BEC

MOT durch Erhöhung des Magnetfeldgradienten und stärkerer Rotverstimmung der Laserfrequenzen räumlich komprimiert. Am Ende dieses Schrittes liegen im Schnitt $2 \cdot 10^8$ Atome mit einer Temperatur von ca. $50 \mu\text{K}$ vor.

Im nächsten Kühlschritt wird die Atomwolke im $|F = 3\rangle$ -Zustand in ein optisches 3D-Gitter geladen. Mithilfe eines Magnetfeldes werden die verschiedenen m_F -Zustände mit den Vibrationszuständen im Gitter entartet. Durch eine zirkulare Komponente in den Gitterstrahlen werden Raman-Übergänge zwischen den Zuständen $|m_F + 1, \nu + 1\rangle$ und $|m_F, \nu\rangle$ getrieben [Ker00].

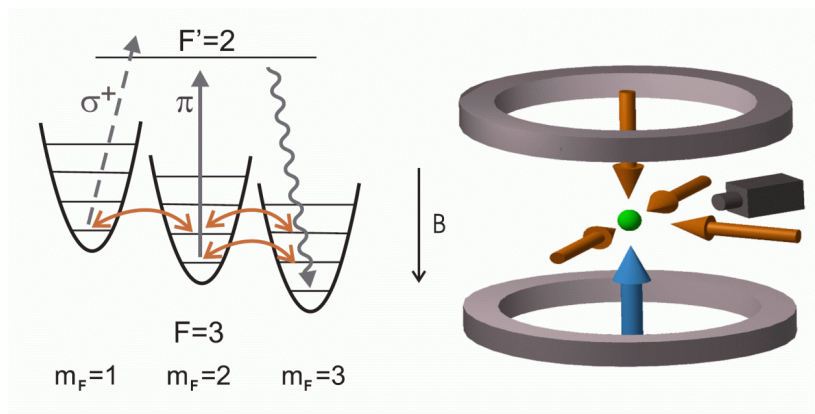


Abbildung 3.3: *links*: Raman-Seitenband Kühlschema mit den Raman-Übergängen (vertikal) und den Rückpumper-Übergängen (horizontal). *rechts*: Strahlkonfiguration für ein 3D-Ramangitter mit den Gitterstrahlen und dem Rückpumperstrahl (Strahl von unten).

Mit dem zirkular polarisierten Anteil des Rückpumperstrahles, des sogenannten *Polarizers*, werden die Atome vom Zustand $|m_F, \nu\rangle$ in den Zustand $|m_F + 1, \nu\rangle$ gepumpt, sodass bereits nach einigen Zyklen die Atome im Zustand $|m_F = 2, \nu = 0\rangle$ landen, da hier der zirkular polarisierte Anteil des Rückpumperstrahls nicht mehr resonant ist. Daher enthält der Rückpumperstrahl auch einen kleinen Anteil π -polarisiertes Licht, welches für die Entvölkerung dieses Zustandes und den Transfer in den Dunkelzustand $|m_F = 3, \nu = 0\rangle$ sorgt.

Damit sind nach 6.5 ms durchschnittlich $7 \cdot 10^7$ Atome auf einer Temperatur von ca. 700 nK und einer Phasenraumdichte von $\rho \approx 10^{-3}$ im absoluten Grundzustand $|F = 3, m_F = 3\rangle$ zur weiteren Verwendung vorhanden.

3.4 Reservoir-Dipolfalle

Die Atomwolke wird danach in die sogenannte *Reservoir-Falle* aus zwei gekreuzten Strahlen eines 1070nm Ytterbium-Faserlasers umgeladen. Die Strahlen haben einen Waist von ca. 0.5 mm und mit der derzeitigen Leistung von ≈ 15 W pro Strahl wird eine Fallenfrequenz von ca. 15 Hz und eine Fallentiefe von ca. $10 \mu\text{K}$ erreicht. Die Atome werden dabei bereits mithilfe eines Magnetfeldgradienten levitiert, da die Reservoirfalle allein nicht ausreichen würde, um die Atomwolke gegen die Gravitation zu halten.

Bei genauerer Betrachtung der Kombination des Magnetfeldgradienten zur Levitation und des homogenen Magnetfeldes zur Einstellung der Streulänge ergibt sich durch die Bedingung $\text{div}\vec{B}=0$ eine schwache auswärts gerichtete Kraft in horizontaler Richtung. Diese verringert sowohl die Fallentiefe als auch die Fallenfrequenz abhängig vom homogenen Magnetfeld B_0 . Die vom Magnetfeld erzeugte Anti-Fallenfrequenz ergibt sich dabei zu

$$\omega_B = g \sqrt{\frac{mCS}{3\mu_B B_0}} \quad (3.15)$$

Dabei bezeichnet μ_B das Bohr'sche Magneton und g die Gravitationsbeschleunigung, B_0 wird hier in Einheiten von Gauss eingesetzt. Bei einem Magnetfeld von 17 G ergibt sich eine Anti-Fallenfrequenz von $\omega_B = 2\pi \cdot 3.4$ Hz, die quadratisch von den optischen Fallenfrequenzen abgezogen werden muss.

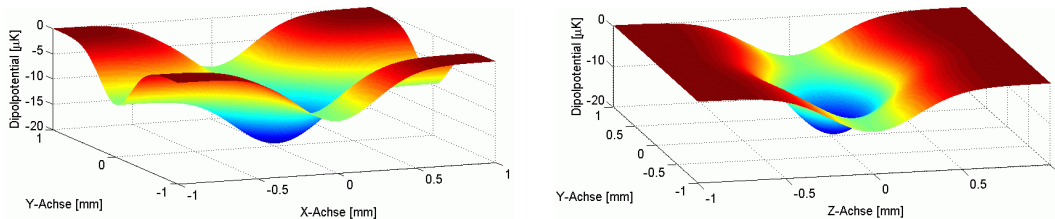


Abbildung 3.4: Berechnetes Potential der Reservoirfalle aus zwei 1070 nm Strahlen mit einem Waist von 0.5 mm und einer Leistung von 15 W. *links*: Horizontale Ebene mit Fallenfrequenz $\omega_r = 2\pi \cdot 15.6$ Hz und einer effektiven Fallentiefe von $9.6 \mu\text{K}$. *rechts*: Vertikale Ebene mit Fallenfrequenz $\omega_z = 2\pi \cdot 22.1$ Hz.

Durch den deutlich schwächeren Einschluss der Reservoirfalle im Vergleich zum Raman-Gitter kommt es zu einem Heizprozess während des Umladevorganges. Daher wird die Atomwolke eine Sekunde lang bei hoher Streulänge ($\approx 1500 a_0$) in der Reservoirfalle gehalten, um die energiereichsten Atome zu evaporieren. Nach diesem Schritt liegen $1 \cdot 10^7$ Atome bei einer Temperatur von ca. $1 \mu\text{K}$ und einer Phasenraumdichte von $\rho \approx 5 \cdot 10^{-3}$ vor.

3.5 Der Dimple-Trick und Evaporation

Zur Steigerung der Phasenraum-dichte auf den kritischen Wert wird der sogenannte *Dimple-Trick* verwendet [SK98]. Zwei stark fokussierte Laserstrahlen erzeugen in der Mitte der Reservoirfalle ein zusätzliches schmales tiefes Potential (Dimple).

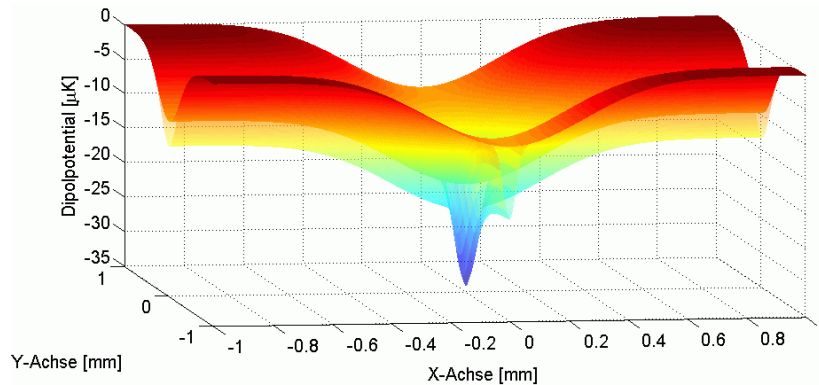


Abbildung 3.5: Berechnetes Potential der Reservoirfalle plus der zusätzlichen Dimplestrahlen (teiltransparent) während des Einladens in den Dimple. Mit den zwei Dimplestrahlen (D1: $P = 110 \text{ mW}$, $w_0 = 40 \mu\text{m}$, D2: $P = 1.4 \text{ W}$, $w_0 = 250 \mu\text{m}$) ergeben sich Fallenfrequenzen von $\omega_{x,z} = 2\pi \cdot 210 \text{ Hz}$, $\omega_y = 2\pi \cdot 20 \text{ Hz}$.

Die Atome füllen den Dimple durch elastische Stöße bei einer Streulänge von ca. $300 a_0$, wobei die Reservoirfalle ihrem Namen gerecht wird. Nach etwa einer Sekunde Ladezeit sind im Dimple ca. $2 \cdot 10^6$ Atome bei $1 \mu\text{K}$ und einer erhöhten Phasenraum-dichte von $\rho \approx 1 \cdot 10^{-1}$.

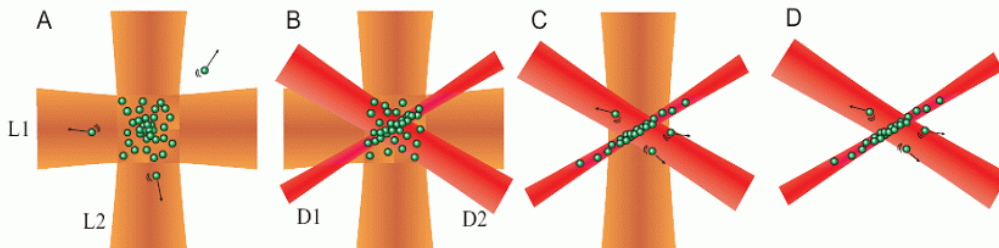


Abbildung 3.6: Schematischer Ablauf des Evaporationsvorganges. (A) In der Reservoirfalle werden die Atome nach dem Ramankühlen gesammelt und das Ensemble thermalisiert (B) Die Dimplestrahlen werden adiabatisch hochgefahren (C) Die Reservoirfalle wird Schritt für Schritt ausgeschaltet (D) Die Leistung der Dimplestrahlen wird in Rampen bis zur Kondensation heruntergefahren.

3.5 Der Dimple-Trick und Evaporation

Nach dem Abschalten der Reservoirfalle wird nun in drei Rampen die Laserleistung der Dimplestrahlen kontinuierlich verringert und damit eine erzwungene Verdampfungskühlung durchgeführt. Dabei wird die Streulänge auf $210 a_0$ gelegt, da noch genügend elastische Stöße für eine schnelle Thermalisierung stattfinden und die Verlustrate durch Dreikörperstöße ein lokales Minimum aufweist (siehe Kapitel 2.1). In der dritten Rampe wird die kritische Phasenraumdicke erreicht und die Bose-Einstein Kondensation setzt ein.

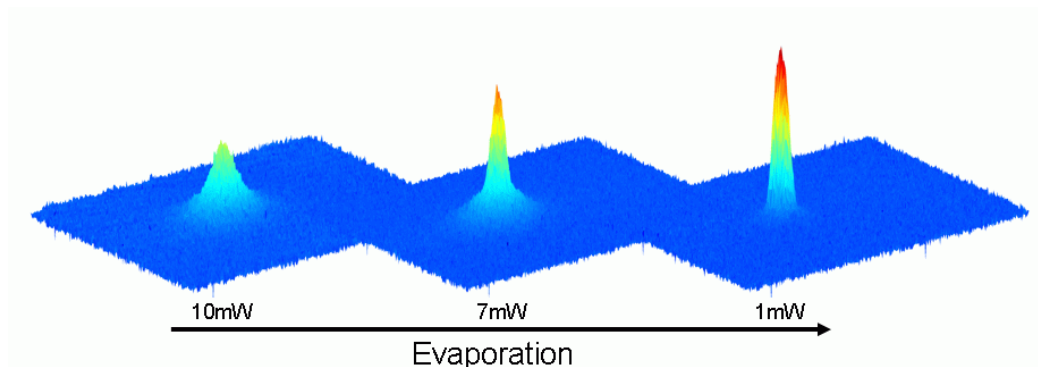


Abbildung 3.7: Absorptionsbilder der Cäsiumwolke bei unterschiedlichen Endleistungen (Fallentiefen) der Dimplestrahlen nach 50 ms (levitierter) Time-of-Flight. Der Phasenübergang von der thermischen Wolke (links) bis zum fast reinen BEC (rechts) ist deutlich zu erkennen.

Am Ende liegt ein BEC aus ca. $2 \cdot 10^5$ Cäsium-Atomen in einer levitierten optischen Dipolfalle mit Fallenfrequenzen von $2\pi \cdot 20, 20, 28$ Hz und einer Fallentiefe von 280 nK vor. Bei einer typischen Streulänge von $210 a_0$ ergeben sich Thomas-Fermi Radii von 14, 14, 10 μm und eine Peakdichte von $5.4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$.

KAPITEL 4

Atominterferometer

Die Interferometrie mit monochromatischem Licht zählt seit über hundert Jahren zu den Standardwerkzeugen in der modernen Physik und ermöglicht unterschiedlichste Arten von Präzisionsmessungen. Mit den Erkenntnissen der Quantenmechanik wurde das Gebiet der Interferometrie auf Materiewellen erweitert. Die erste experimentelle Bestätigung der Interferenz von Materiewellen gelang 1926 Davisson und Germer durch den Nachweis der Beugung eines Elektronenstrahls mithilfe eines Kristalls. Bald darauf folgten die ersten Doppelspaltexperimente mit Elektronen [Jön61], später Neutronen und schließlich neutralen Atomen [Car91]. Aufbauend auf den ersten experimentellen Erfolgen, Licht als 'Gitter' bzw. als '50:50 Strahlteiler' für kalte Atome zu verwenden [Gou86, Mar88], wurde das erste Interferometerexperiment mit einem Lichtgitter und lasergekühlten Atomen demonstriert [Kas91].

Durch die Verwendung eines Bose-Einstein Kondensates als Ausgangspunkt konnte der erzielbare Kontrast gegenüber thermischen Wolken auf nahezu 100% erhöht werden [Tor00]. Dadurch wurde eine Vielzahl von Möglichkeiten für zukünftige Präzisionsmessungen geschaffen. Dieses Kapitel basiert im Wesentlichen auf Ideen aus der Doktorarbeit von [Gup03] und geht auf die grundlegenden Konzepte eines Atominterferometers sowie den durchgeführten technischen Aufbau des dazu benötigten Lasersystems ein.

Das Ziel bei Fertigstellung des Aufbaus ist die Untersuchung der Wechselwirkungseffekte im Atominterferometer mithilfe der einfachen Abstimbarkeit von Cäsium. Dies soll im zweiten Schritt zur präzisen Messung der Photonen-Rückstoßfrequenz und der daraus berechenbaren Feinstrukturkonstante genutzt werden, wobei wir durch die magnetische Levitation viel längere Beobachtungszeiten als in bisherigen Aufbauten nutzen können und die Wechselwirkungseffekte auf Null stellen können. Dadurch sollte eine Genauigkeit im ppb-Bereich möglich werden.

4.1 Atom-Licht Wechselwirkung

Im Allgemeinen wird bei der Betrachtung der Wechselwirkung zwischen einem Atom und einem Lichtfeld das Atom als Zwei-Niveau-System mit dem Grundzustand $|g\rangle$ und dem angeregten Zustand $|e\rangle$ mit der Energiedifferenz $\Delta E = \hbar\omega_{eg}$ angenommen, das Lichtfeld wird beschrieben durch eine Oszillation des elektromagnetischen Feldes

4 Atominterferometer

am Ort des Atomes

$$\vec{E}(t) = \vec{e} \cdot E_0 \cos(\omega t) \quad \text{mit } \vec{e} \dots \text{Polarisationsvektor} \quad (4.1)$$

Die Stärke der Kopplung zwischen den beiden Zuständen wird durch das Dipol-Matrixelement $\vec{d} = \langle e | \vec{d}_{eg} | g \rangle$ bestimmt. Mit Einführung der Verstimmung $\delta = \omega_{eg} - \omega$ sowie der *resonanten Rabi-Frequenz*

$$\Omega_0 = \frac{\vec{d}\vec{e}E_0}{\hbar} \quad (4.2)$$

und der Verwendung der *Rotating Wave Approximation* ($\omega \approx \omega_{eg}$) erhält man aus der Schrödinger-Gleichung ein gekoppeltes Gleichungssystem, welches die Besetzungsamplitude in den beiden Zuständen beschreibt

$$\dot{a}_g(t) = i \frac{\Omega_0}{2} e^{i\delta t} a_e(t) \quad (4.3)$$

$$\dot{a}_e(t) = i \frac{\Omega_0}{2} e^{-i\delta t} a_g(t) \quad (4.4)$$

Im einfachsten Fall der Anregung bei Resonanz $\delta = 0$ ergeben sich die typischen *Rabi-Oszillationen* zwischen den beiden Zuständen, sowie die Möglichkeit von $\pi/2$ - (50:50 Aufteilung in beide Zustände) und π -Pulsen (kompletter Transfer in den angeregten Zustand).

In den folgenden Abschnitten wird als Notation der Zustände $|1, 2\rangle$ mit 1... Elektronischer Zustand (g für den Grundzustand und e für den angeregten Zustand) und 2... Impulszustand (z.B. $+2\hbar k$ ist der Zustand mit Impuls $2\hbar k$ in positiver z -Richtung) verwendet.

4.1.1 Kapitza-Dirac-Regime

1933 berechneten Kapitza und Dirac, dass Elektronen an einem optischen Gitter aufgrund stimulierter Compton-Streuung reflektiert werden würden [Kap33]. Später wurde gezeigt, dass neutrale Atome ebenfalls an optischen Gittern gestreut werden können. Grundlage dabei ist die Annahme, dass die Teilchenbewegung während der Interaktion mit dem Lichtfeld vernachlässigt werden kann (Raman-Nath-Approximation). Dies wird erreicht für Wechselwirkungszeiten, die sehr viel kleiner sind als die inverse *Photonen-Rückstoßfrequenz* $1/\omega_{rec}$, wobei diese definiert ist als

$$\omega_{rec} = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad \text{mit } k \dots \text{Wellenvektor der Stehwelle} \quad (4.5)$$

und ebenfalls die Rückstoßenergie $E_{rec} = \hbar\omega_{rec}$ bei Absorption oder Emission eines Photons der Stehwelle bestimmt. Der gesamte Hamilton-Operator unter Vernachlässigung der kinetischen Energie bzw. Wechselwirkungen zwischen den Atomen ergibt sich zu

$$H(x, t) = \frac{\hbar\Omega_0^2}{\delta} f^2(t) \sin^2(kx) \quad (4.6)$$

wobei $f(t)$ die zeitabhängige Amplitude des E-Feldes der Stehwelle ist. Mithilfe der Eikonal-Approximation kann die Wellenfunktion nach der Wechselwirkung mit der Stehwelle als

$$|\Psi\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int dt H(x, t)\right) |\Psi_0\rangle \quad (4.7)$$

geschrieben werden. Mit $\tau = \int dt f^2(t)$, der Bessel-Identität $\exp(ia \cos(b)) = \sum_n i^n J_n(a) \exp(inb)$, dem Anfangszustand $|\Psi_0\rangle = |g, 0\rangle$ sowie der Ortsdarstellung der Impulseigenzustände $\langle x | g, p \rangle = \exp(-ipx/\hbar)$ ergibt sich

$$|\Psi\rangle = \exp\left(-i\frac{\Omega_0^2}{2\delta}\tau\right) \sum_n i^n J_n\left(\frac{\Omega_0^2}{2\delta}\tau\right) |g, 2n\hbar k\rangle \quad (4.8)$$

Daraus kann direkt die Besetzung höherer Impulszustände mit Vielfachen von $2\hbar k$ bestimmt werden zu

$$P(n) = J_n^2(\Omega_{(2)}\tau) \quad \text{mit} \quad \Omega_{(2)} = \frac{\Omega_0^2}{2\delta} \quad \text{für} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (4.9)$$

mit der *Zwei-Photonen Rabi-Frequenz* $\Omega_{(2)}$. Somit kann mithilfe eines geeigneten Laserpulses ein definierter Anteil der Atome in Impulszustände mit Vielfachen von $\pm 2\hbar k$ transferiert werden.

4.1.2 Bragg-Regime

Bragg-Streuung tritt dann auf, wenn in zwei gegenläufigen Strahlen ein Atom aus einem Strahl ein Photon absorbiert und in den anderen Strahl kohärent emittiert. Bragg-Streuung ist somit ein Zwei-Photonenübergang, der den inneren Zustand des Atomes unverändert lässt, gleichzeitig aber den Impuls des Atomes um $2\hbar k$ verändert. Ein Bragg-Prozess N_B -ter Ordnung verändert den Impuls des Atoms um $2N_B\hbar k$. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, ein Atom vom Zustand $|g, -\hbar k\rangle$ in den Zustand $|g, +\hbar k\rangle$ überzuführen, wird zunächst der Hamilton-Operator $H(t) = H_0(t) + H_{int}(t)$ unter Vernachlässigung aller höheren Anregungen angeschrieben

$$H_0(t) = \hbar\omega_{eg} |e, 0\rangle \langle e, 0| + \hbar\omega_{rec} (|g, -\hbar k\rangle \langle g, -\hbar k| + |g, +\hbar k\rangle \langle g, +\hbar k|) \quad (4.10)$$

$$H_{int}(t) = -i \exp(i\omega t) \frac{\hbar\Omega_0}{2} (|e, 0\rangle \langle g, -\hbar k| - |e, 0\rangle \langle g, +\hbar k|) + h.c. \quad (4.11)$$

Durch Wahl eines geeigneten Ansatzes für die Wellenfunktion erhält man mit $\Delta = \delta + \omega_{rec}$ aus der Schrödinger-Gleichung folgendes Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeitsamplituden $p_{\pm\hbar k}(t)$, $p_0(t)$ der Zustände $|g, \pm\hbar k\rangle$, $|g, 0\rangle$:

$$\dot{p}_{\pm\hbar k}(t) = \mp \frac{\Omega_0}{2} \exp(i\Delta t) p_0(t) \quad (4.12)$$

$$\dot{p}_0(t) = \frac{\Omega_0}{2} \exp(-i\Delta t) (p_{+\hbar k}(t) - p_{-\hbar k}(t)) \quad (4.13)$$

4 Atominterferometer

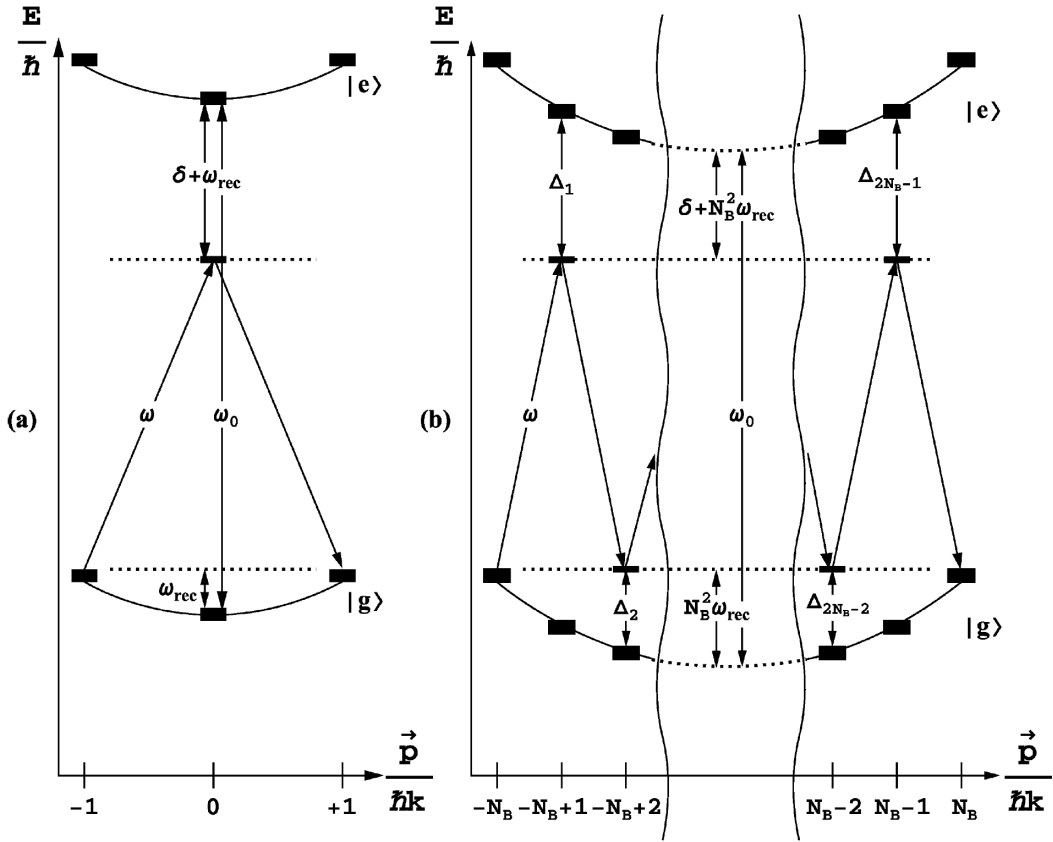


Abbildung 4.1: Energiediagramm für Übergänge eines (a) Bragg-Pulses erster Ordnung (b) Bragg-Pulses N_B -ter Ordnung, entnommen aus [Gup03].

Das Differenzialgleichungssystem kann für geeignete Anfangsbedingungen ($p_{-\hbar k}(0) = 1$, $p_{+\hbar k}(0) = 0$, $p_0(0) = 0$ und $\dot{p}_{\pm\hbar k}(0) = 0$) und mittels der Näherungen $\Delta^2 \gg \Omega_0^2$ und $|\delta| \gg \omega_{rec}$ zu

$$p_{-\hbar k}(t) = \exp\left(-i\frac{\Omega_{(2)}}{2}t\right) \cos\left(\frac{\Omega_{(2)}}{2}t\right) \quad (4.14)$$

$$p_{+\hbar k}(t) = i \exp\left(-i\frac{\Omega_{(2)}}{2}t\right) \sin\left(\frac{\Omega_{(2)}}{2}t\right) \quad (4.15)$$

$$p_0(t) = -i\frac{\Omega_0}{2\Delta} \exp(-i\Delta t) \exp(-i\Omega_{(2)}t) \quad (4.16)$$

gelöst werden. Dabei ist $\Omega_{(2)}$ die vorher eingeführte Zwei-Photonen Rabi-Frequenz. Diese Lösung wird auch *Pendellösung* genannt, da das System zwischen den verschiedenen Impulszuständen hin- und herpendelt. Als Wahrscheinlichkeit, das Atom vom

Zustand $|g, -\hbar k\rangle$ in den Zustand $|g, +\hbar k\rangle$ zu transportieren, ergibt sich somit

$$P_{+\hbar k}(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega_{(2)}}{2}t\right) \quad (4.17)$$

Für einen Bragg-Übergang N_B -ter Ordnung modifiziert sich die Zweiphotonen-Rabi-Frequenz mit der Näherung $|\delta| \gg N_B^2 \omega_{rec}$ zu

$$\Omega_{(2N_B)} = \frac{\Omega_0^{2N_B}}{2^{4N_B-3} \cdot [(N_B - 1)!]^2 \cdot \delta^{N_B} \cdot \omega_{rec}^{N_B-1}} \quad (4.18)$$

4.1.3 Abschätzung der experimentellen Parameter

Für diese Abschätzung wird als Übergang die D2-Linie von Cäsium verwendet, die Laserfrequenz der Interferometerstrahlen wird im Bereich von 1 – 100 GHz rotverstimmt angenommen. Als Strahlwaist wird $w_0 = 2$ mm angenommen, um in einem möglichst großen Raumbereich über das BEC nahezu konstante Intensitäten sicherzustellen. Die resonante Rabi-Frequenz im Gittertopf einer Stehwelle ergibt sich zu

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{8Pc^2\Gamma_{D2}}{w_0^2\hbar\omega_{D2}^3}} \quad (4.19)$$

Kapitza-Dirac-Regime

Zur Erfüllung der Raman-Nath Approximation $t_{max} \ll 1/\omega_{rec}$ wird als obere Grenze $t_{max} = 1/10\omega_{rec}$ angenommen. Da sich bei den vorgesehenen Verstimmungen die Photonen-Rückstoßfrequenz nicht wesentlich ändert, kann als maximale Pulslänge für alle Verstimmungen $t_{max} \approx 7.7 \mu s$ angegeben werden. Zur Abschätzung der erforderlichen Leistungen wird die benötigte Leistung bei Aufspaltung des BECs in drei Impulskomponenten ($47.7\% |g, 0\rangle$, $23.8\% |g, \pm\hbar k\rangle$)¹ bei $\Omega_{(2)}t \approx 1.1612$ berechnet. Die Bedingung für vernachlässigbare spontane Emission sollte in diesem Regime ausreichend gegeben sein, zur Kontrolle wurden die Werte mitgerechnet.

Tabelle 4.1: Benötigte Laserleistung und spontane Streurrate für einen Kapitza-Dirac-Puls mit $T = 7.7 \mu s$ abhängig von der Verstimmung δ

$\delta/2\pi$ [GHz]	1	2	5	10	20	50	100
P pro Strahl [mW]	0.366	0.731	1.828	3.655	7.311	18.27	36.54
$N_S = \Gamma_{sc} * t_{max}$	0.0121	0.0061	0.0024	0.0012	0.0006	0.0002	0.0001

¹Die Summe der drei Impulskomponenten ergibt nicht 100%, da bereits ein kleiner Anteil höherer Impulsordnungen erzeugt wird.

Bragg-Regime

Die untere Grenze für die Pulslänge ergibt sich aus der Bedingung, dass die Pulszeit lang genug sein muss, um verschiedene Impulszustände getrennt voneinander auflösen zu können.

$$t_{min} \gg \frac{\pi}{4\omega_{rec}} \quad \text{bzw.} \quad t_{min} \gg \frac{\pi}{2(N_B - 1)\omega_{rec}} \quad (4.20)$$

Für einen Bragg-Puls 1. Ordnung ergibt sich somit eine minimale Pulslänge von $t_{min} \gg 60.5 \mu\text{s}$, für einen Bragg-Puls 2. Ordnung $t_{min} \gg 121 \mu\text{s}$. Eine obere Grenze legt die Forderung nach vernachlässigbarer spontaner Emission fest. Dafür ergibt sich die Bedingung

$$t_{max} \ll \frac{\delta^2}{\Gamma_{D2}\Omega_0^2} \quad \text{bzw.} \quad N_S = \frac{\Gamma_{D2}\Omega_0^2}{\delta^2} t \ll 1 \quad (4.21)$$

Die Berechnung der maximalen Pulsdauer in Tabelle 4.2 gilt daher für Bragg-Pulse beliebiger Ordnung.

Tabelle 4.2: Berechnete Maximalzeit der Bragg-Pulse für eine spontane Streurrate von $N_S = 0.1$ abhängig von Verstimmung und Laserleistung, angegeben in ms

$\delta/2\pi$ [GHz]	Laserleistung pro Strahl [mW]					
	0.1	0.2	0.5	1	2	5
1	0.232	0.116	0.046	0.023	0.012	0.005
2	0.929	0.464	0.186	0.093	0.046	0.019
5	5.804	2.902	1.161	0.58	0.29	0.116
10	23.214	11.607	4.643	2.321	1.161	0.464
20	92.857	46.429	18.571	9.286	4.643	1.857
50	580.359	290.179	116.072	58.036	29.018	11.607
100	2321.435	1160.718	464.287	232.144	116.072	46.429

Für einen Bragg-Puls N_B -ter Ordnung, der die gesamte Population von $|g, -N_B\hbar k\rangle$ nach $|g, +N_B\hbar k\rangle$ transferiert, errechnet sich die Pulsdauer nach Gleichung 4.17 und 4.18 zu

$$t_{Puls} = \frac{\pi}{\Omega_{(2N_B)}} \quad (4.22)$$

In Tabelle 4.3 und 4.4 sind die jeweiligen Pulsdauern für Bragg-Pulse erster und zweiter Ordnung abhängig von Verstimmung und Laserleistung dargestellt. Die nicht angegebenen Zeiten in den Tabellen liegen außerhalb der für die jeweiligen Bragg-Pulse zulässigen Grenzen.

4.2 Interferometerkonfigurationen

Tabelle 4.3: Berechnete Pulsdauer eines π -Bragg-Pulses erster Ordnung, abhängig von Verstimmung und Laserleistung, angegeben in ms. Nicht angegebene Zeiten liegen außerhalb der für die Bragg-Pulse zulässigen Grenzen

$\delta/2\pi$ [GHz]	Laserleistung pro Strahl [mW]					
	0.1	0.2	0.5	1	2	5
1	0.076					
2	0.152	0.076				
5	0.381	0.19	0.076			
10	0.762	0.381	0.152	0.076		
20	1.524	0.762	0.305	0.152	0.076	
50	3.809	1.904	0.762	0.381	0.19	0.076
100	7.618	3.809	1.524	0.762	0.381	0.152

Tabelle 4.4: Berechnete Pulsdauer eines π -Bragg-Pulses zweiter Ordnung, abhängig von Verstimmung und Laserleistung, angegeben in ms. Nicht angegebene Zeiten liegen außerhalb der für die Bragg-Pulse zulässigen Grenzen

$\delta/2\pi$ [GHz]	Laserleistung pro Strahl [mW]					
	0.1	0.2	0.5	1	2	5
1	0.192					
2	0.767	0.192				
5	4.796	1.199	0.192			
10	19.185	4.796	0.767	0.192		
20	76.734	19.184	3.069	0.767	0.192	
50	479.508	119.877	19.18	4.795	1.199	0.192
100	1917.485	479.371	76.699	19.175	4.794	0.767

4.2 Interferometerkonfigurationen

In dieser Arbeit werde ich kurz auf zwei verschiedene Interferometertypen genauer eingehen. Das Prinzip des *Mach-Zehnder Interferometers* ist bereits hinlänglich durch die vielfältigen Anwendungen in der Optik bekannt, hier gehe ich nur kurz auf die Umsetzung mit Materiewellen ein. Etwas genauer wird das Kontrastinterferometer nach [Gup02] beleuchtet. Dieses ist speziell zur Messung der Photonen-Rückstoßfrequenz ausgelegt und ist unempfindlich gegenüber Phasenschwankungen des Lichtfeldes.

4.2.1 Mach-Zehnder Interferometer

Ein Mach-Zehnder Interferometer misst im Prinzip den Phasenunterschied zweier zu Beginn in Phase befindlichen Wellen, die sich für eine Zeit $2T$ auf unterschiedlichen

4 Atominterferometer

Wegen ausbreiten und dann wieder überlagert werden. Die Konfiguration eines solchen Interferometers für Materiewellen ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Ein $\pi/2$ -Bragg-Puls agiert dabei als '50:50'-Beamsplitter zur Aufteilung und Überlagerung, ein π -Bragg-Puls sorgt für die Umkehrung des Impulses, um die Wellen wieder örtlich zusammenzuführen.

Da sich das BEC zu Beginn in Ruhe befindet und ein Bragg-Puls einer Stehwelle nur zwischen den Impulszuständen $|\hbar k\rangle$ und $|-\hbar k\rangle$ wirkt, wird durch Verstimmung eines der beiden Laserstrahlen eine bewegte Stehwelle erzeugt. Dadurch 'sieht' die Stehwelle in ihrem Ruhesystem bewegte Atome, und bei Wahl einer geeigneten Verstimmung δ_{rel} kann ein Bragg-Prozess N_B -ter Ordnung angeregt werden.

$$\delta_{rel} = \frac{2N_B \hbar k^2}{m} = 4N_B \omega_{rec} \quad (4.23)$$

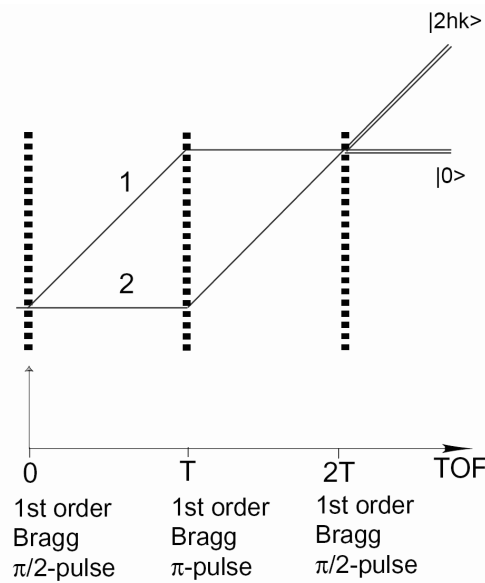


Abbildung 4.2: Schema eines Mach-Zehnder-Interferometers für Materiewellen. Messgröße ist die Besetzungswahrscheinlichkeit der beiden Impulszustände, die vom aufgesammelten Phasenunterschied zwischen den beiden Wegen bestimmt wird. Entnommen aus [Gup03].

Die Wahrscheinlichkeit, Atome nach dem Interferometerschema im Zustand $|+2\hbar k\rangle$ bzw. $|0\rangle$ vorzufinden, berechnen sich unter Berücksichtigung unterschiedlicher relativer Phasen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 des Gitters zu den drei Pulszeiten, der Phasenentwicklung zwischen den Pulsen $e^{-i4\omega_{rec}T}$ $|+2\hbar k\rangle$ und einer zusätzlichen Phasenverschiebung zwischen

den beiden Wegen ϕ_{12} zu

$$P(|0\rangle) = \cos^2\left(\frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2 + \phi_{12}}{2}\right) \quad (4.24)$$

$$P(|+2\hbar k\rangle) = \sin^2\left(\frac{\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_2 + \phi_{12}}{2}\right) \quad (4.25)$$

Die Besetzung der Zustände hängt also einerseits von Phasenanteilen, die vom Gitter verursacht werden wie z.B. durch Vibrationen der Spiegel oder Verschiebung der Phase eines Gitterstrahles mithilfe eines EOM oder AOM, und andererseits von der zusätzlichen Phasenverschiebung zwischen beiden Wegen, die z.B. durch unterschiedliche Wechselwirkung mit externen Kräften verursacht werden kann. Bei genügend großer Unterdrückung der Vibrationen und Phasenschwankungen des Gitters kann dieses Interferometerschema zur präzisen Messung von z.B. Gravitation oder Rotation verwendet werden.

4.2.2 Kontrastinterferometer nach Gupta

Das Ausgangssignal des im letzten Kapitel besprochenen einfachen Mach-Zehnder-Interferometers ist unabhängig von der Photonen-Rückstoßfrequenz. Die Unterdrückung der Vibrationen und Phasenschwankungen ist recht aufwendig, und durch den unsymmetrischen Aufbau ist der Aufbau z.B. empfindlich gegenüber Magnetfeldgradienten. Das Kontrast-Interferometerschema nach [Gup03] ist zur Messung der Photonen-Rückstoßfrequenz ausgelegt und ist durch seinen Aufbau insensitive gegenüber Phasenschwankungen und Vibrationen. Zur einfacheren Erklärung des Kontrastinterferometers eignet es sich, zunächst ein Zwei-Weg Phaseninterferometer zur Messung der Photonen-Rückstoßfrequenz zu betrachten und dieses dann auf das Kontrastinterferometer zu erweitern.

Zwei-Weg Phaseninterferometer

Das Zwei-Weg Phaseninterferometer in Abbildung 4.3 (a) unterscheidet sich gegenüber dem Mach-Zehnder-Interferometer dadurch, dass als zweiter Puls ein Bragg- π -Puls zweiter Ordnung verwendet wird und dass kein dritter Bragg-Puls durchgeführt wird. Durch den Bragg- π -Puls zweiter Ordnung zum Zeitpunkt T wird der Zustand $|+2\hbar k\rangle$ 'gespiegelt' d.h. in den Zustand $|-2\hbar k\rangle$ transferiert. Da der Zustand im zweiten Weg keine zusätzliche Phasenverschiebung erhält, hängt die relative Phase zwischen beiden Wegen nun von der Photonen-Rückstoßfrequenz ab. Um den Zeitpunkt $2T$ überlagern sich beide Wege des Interferometers und es entsteht eine bewegte Materiestehwelle mit $v = 2\hbar k/m$. Die Phase dieser sich bewegenden Stehwelle zum Zeitpunkt $2T$ ergibt sich mit den relativen Phasen ϕ_1 und ϕ_2 des Gitters zu den zwei Pulszeiten zu

$$\delta_\Phi = \phi_1 - 2\phi_2 - 8\omega_{rec}T \quad (4.26)$$

4 Atominterferometer

Würde man statt der Erste-Ordnung und Zweite-Ordnung Bragg-Pulse jeweils N_B te-Ordnung und $2N_B$ te-Ordnung verwenden, ergibt sich der Phasenunterschied zu

$$\delta_\Phi = \phi_1 - 2\phi_2 - 8N_B^2\omega_{rec}T \quad (4.27)$$

Dabei ist vor allem die quadratische Abhängigkeit des Phasenunterschiedes von der Ordnung der Bragg-Pulse hervorzuheben, die für Präzisionsmessungen genutzt werden könnte.

Kontrastinterferometer

Kombiniert man nun zwei dieser Phaseninterferometer miteinander (Abbildung 4.3 (b)), so ergibt sich ein Interferometer mit 3 Wegen. Dafür wird der erste Bragg-Puls durch einen Kapitza-Dirac-Puls ersetzt, um symmetrisch $|\pm 2\hbar k\rangle$ -Anteile zu erzeugen.

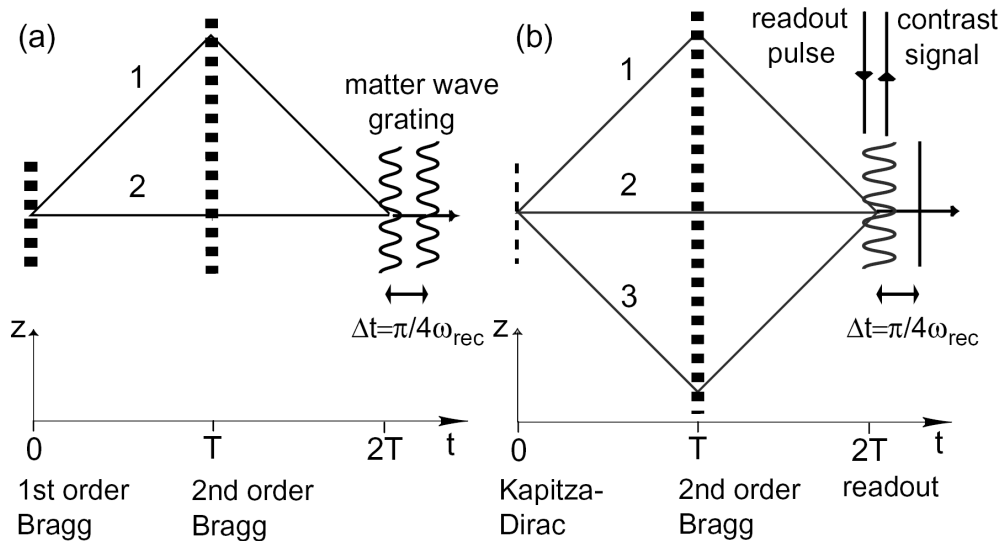


Abbildung 4.3: Schema des Kontrastinterferometers (a) 2-Weg Phaseninterferometer mit Abhängigkeit von ω_{rec} (b) Erweiterung auf ein 3-Weg Kontrastinterferometer, entnommen aus [Gup03].

Diese werden dann mit einem Bragg- π -Puls zweiter Ordnung zum Zeitpunkt T gespiegelt und ergeben dann durch Überlagerung zum Zeitpunkt $2T$ zwei gegeneinander laufende Stehwellen. Diese bewegen sich relativ zueinander mit $v = 4\hbar k/m$ und erzeugen ihrerseits eine Stehwelle, deren Kontrast mit einer Frequenz $\nu = 2\omega_{rec}/\pi$ schwingt und eine Periodizität von $\lambda/2$ entlang der z -Achse aufweist. Durch Erweiterung des Zwei-Weg Phaseninterferometers auf drei Wege unter Annahme der Amplituden $a_{1,3} |g, \pm 2\hbar k\rangle$, $b |g, 0\rangle$ und mit den gesammelten Phasenunterschieden der Wege

1 und 3

$$\Phi_1 = \phi_1 - 2\phi_2 - 4\omega_{rec}t \text{ bzw. } \Phi_3 = -\phi_1 + 2\phi_2 - 4\omega_{rec}t \quad (4.28)$$

ergibt sich die Dichte entlang der Stehwelle abhängig von der Zeit zu

$$n(z, t) = 2a + b^2 + 2a \cos(4kz + \Phi_1 - \Phi_3) + 4ab \cos\left(2kz + \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}\right) \quad (4.29)$$

Nur der Term mit $\Phi_1 + \Phi_3$ hängt von der Zeit ab, die Differenz der Phasen der beiden symmetrischen Wege ergibt einen konstanten Wert. Eine Messung der rückreflektierten Intensität eines schwachen Auslesepulses wird aufgrund von Bragg-Reflexion des Lichts an der Materiestehwelle ein Signal proportional zum Kontrast liefern. Dieses Kontrastsignal um den Zeitpunkt $t = 2T$ ergibt sich unter Berücksichtigung einer anfänglichen Offsetphase ϕ_{off} dann zu

$$I(t) \sim \cos^2\left(8\omega_{rec}T + 4\omega_{rec}(t - 2T) + \phi_{off}\right) \quad (4.30)$$

Die Messung der Photonen-Rückstoßfrequenz kann somit auf die Messung der Phase dieser Kontrastschwingung zum Zeitpunkt $t = 2T$ zurückgeführt werden. Durch Aufnahme vieler Messpunkte mit unterschiedlichen Zeiten T kann die Offsetphase eliminiert werden. Werden höhere Impulszustände ($\pm 2N_B \hbar k$) z.B. durch zusätzliche Bragg-Pulse im Interferometer zur Überlagerung verwendet, ergibt sich die Phase der Kontrastschwingung zu

$$\Phi = 8N_B^2 \omega_{rec}T + 4N_B^2 \omega_{rec}(t - 2T) + \phi_{off} \quad (4.31)$$

4.3 Präzisionsmessungen

Für eine Präzisionsmessung ist es unabdingbar, dass möglichst alle Fehlerquellen identifiziert werden und deren Einfluss auf das Messergebnis abgeschätzt wird. Dabei kann zwischen *Präzision* und *Genauigkeit* unterschieden werden. Einfach ausgedrückt beschreibt die Präzision dabei die relative Streuung der Messwerte um ihren Mittelwert, die Genauigkeit hingegen die Übereinstimmung dieses Mittelwertes mit dem tatsächlich zu messenden Wert.

4.3.1 Bestimmung der Feinstrukturkonstante

Eine der wichtigsten Messungen, die zukünftig mit dem Atominterferometer durchgeführt werden sollen, ist die Ermittlung der Photonen-Rückstoßfrequenz ω_{rec} und daraus die Bestimmung der Feinstrukturkonstante α mit einer Genauigkeit im ppb-Bereich. Die Feinstrukturkonstante ist eine der grundlegenden Konstanten der Quantenelektrodynamik (QED) und spielt damit eine gewichtige Rolle in jeder QED-Berechnung. In der letzten veröffentlichten Zusammenstellung der Naturkonstanten (CODATA 2002,

4 Atominterferometer

[Moh05]) ist α mit einer Genauigkeit von 3.3 ppb angegeben, wobei diese hauptsächlich auf der Messung des magnetischen Moments des Elektrons aus dem Jahr 1987 beruht [VD87]. Seither wurden weitere Messungen, basierend auf Frequenzspektrosko-

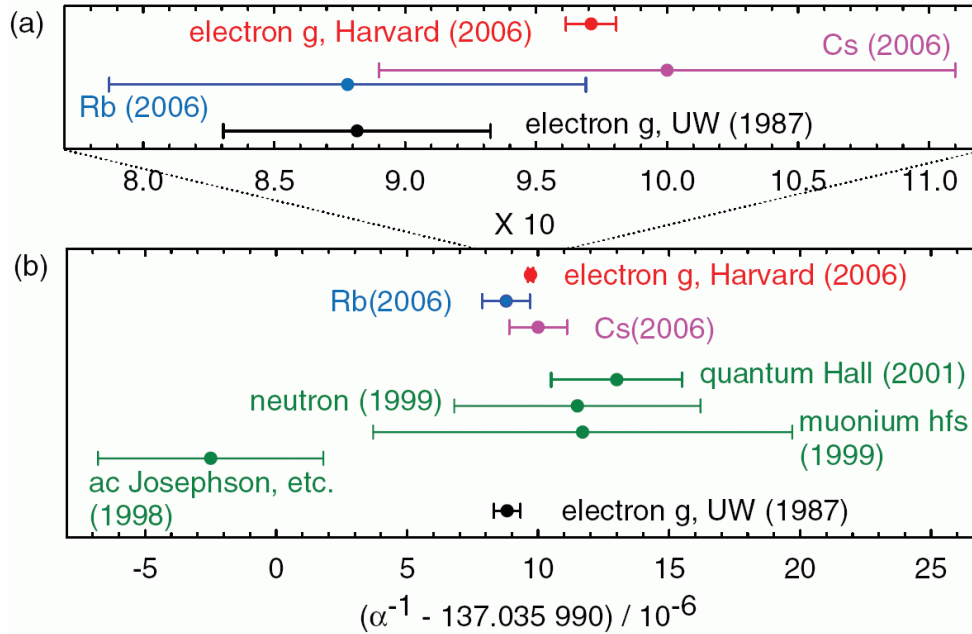


Abbildung 4.4: Experimentelle Bestimmung der Feinstrukturkonstante α , entnommen aus [Gab06]

pie von Cäsium [Ger06] (8.0 ppb), Blochoszillationen mit Rubidium [Cla06] (6.7 ppb) und einer weiteren Messung des g-Faktors des Elektrons [Gab06] (0.7 ppb) durchgeführt (Abbildung 4.4). Eine genauere und vom g-Faktor des Elektrons unabhängige Bestimmung der Feinstrukturkonstante ist damit immer noch ausständig. Um von der Photonen-Rückstoßfrequenz auf die Feinstrukturkonstante rückzurechnen, bedient man sich folgendes Ausdruckes

$$\alpha^2 = \frac{2R_\infty m_{Cs}}{c} \frac{h}{m_e m_{Cs}} \quad (4.32)$$

wobei alle Größen bis auf h/m_{Cs} im sub-ppb-Bereich bekannt sind. Mit Bestimmung der Photonen-Rückstoßfrequenz

$$\omega_{rec} = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{m_{Cs}} k^2 \quad (4.33)$$

bei möglichst genau bekanntem Wellenvektor $k = 2\pi/\lambda$ ist somit die direkte Berechnung von α leicht möglich.

4.3.2 Abschätzung der Fehlerquellen

Zunächst sollte hervorgehoben werden, welche Fehlerquellen beim Kontrastinterferometer durch dessen Aufbau und Symmetrie unterdrückt werden.

- **Phasenverschiebung:** Da sich die Phase des Kontrastsignals aus der Differenz der Phasen der beiden Interferometerarme ergibt, ist diese unabhängig von Spiegelvibrationen und Phasenverschiebungen im Lichtfeld zwischen den Pulsen. Treten diese während einem Bragg-Puls auf, führt dies effektiv nur zu einer Verschiebung der Bragg-Bedingung.
- **Zeitliche Magnetfeldschwankungen und Magnetfeldgradienten:** Mit denselben Symmetrieüberlegungen kann ein Einfluss von Magnetfeldschwankungen bzw. Schwankung des Magnetfeldgradienten vernachlässigt werden.
- **Beschleunigungen, die auf beide Pfade gleich wirken:** Externe Kräfte wie z.B. Gravitation oder Rotation beeinflussen durch die Symmetrie das Kontrastsignal nicht.

Präzisionsbestimmende Faktoren

Dies sind Faktoren, deren Einfluss sich von einem Experimentzyklus zum Nächsten verändert und daher die Präzision verschlechtert. Im Allgemeinen kann man dabei davon ausgehen, dass sich diese Faktoren als zusätzliche Streuung um den Messwert bemerkbar machen.

- **Schrotrauschen (shot noise):** Dies ist ein Rauschen aufgrund der Tatsache, dass eine Messung an N Teilchen durchgeführt wird. Die Unsicherheit in der absoluten Phase ergibt sich hierbei zu $\Delta\Phi \approx 2/\sqrt{N}$
- **Zeitmessung:** Die relative Phasenunsicherheit aufgrund von Schwankungen in der Zeitmessung können mit $\Delta\Phi/\Phi \approx \Delta t/t$ abgeschätzt werden.
- **Wechselwirkungsenergie:** Bei nicht verschwindender Wechselwirkung kommt es durch Schwankungen der Teilchenzahlen in den beiden Interferometerarmen zu einer Phasenverschiebung aufgrund der unterschiedlichen Dichten. Die relative Phasenunsicherheit ergibt sich mit einem Ungleichgewichtsfaktor $x = (N_1 - N_3)/(N_1 + N_3)$ und der mittleren Kondensatdichte in den Interferometerarmen $n(t)$ zu

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \int_0^{2T} \frac{gxn(t)}{4\hbar\omega_{rec}N_B^2} dt \quad (4.34)$$

Durch das Schrotrauschen ergibt sich ein minimaler Ungleichgewichtsfaktor von $x \approx 2/\sqrt{N}$.

4 Atominterferometer

- **Wellenvektor:** Die Linienbreite des Lasers lässt sich in eine Unsicherheit des Wellenvektors umrechnen, welche ebenfalls zu Schwankungen in der Phase führt. Es ergibt sich eine relative Phasenunsicherheit mit $\Delta\Phi/\Phi \approx \sqrt{(2)}\Delta\nu/\nu$

Durch die Möglichkeit, die Wechselwirkung von Cäsium auf Null zu stellen, kann der Faktor Wechselwirkungsenergie nahezu vollständig ausgeschaltet werden. Das gesamte Timing im Experiment wird mithilfe einer Zeitreferenz auf Basis der GPS-Zeit durchgeführt, daher liegt der Fehler der Zeitmessung im sub-ppb Bereich. Die Linienbreite des Lasers muss ebenfalls im sub-ppb Bereich liegen, was eine durchaus erreichbare Linienbreite von < 350 kHz bedeutet. Die relative Unsicherheit durch das Schrotrauschen kann durch Verwendung höherer Bragg-Ordnungen und lange Interferometerzeiten in den sub-ppb Bereich gebracht werden.

Genauigkeitsbestimmende Faktoren

Durch diese Faktoren wird der gemessene Mittelwert gegenüber dem wahren Wert verschoben.

- **Magnetfeldwölbung:** Durch die Magnetfeldwölbung (siehe Kapitel 3.4) ergibt sich eine Phasenverschiebung aufgrund des ortsabhängigen Potentials $U_B = -\frac{m^2 g^2 r^2}{6\mu_B B_0}$, wobei hier g die lokale Gravitationsbeschleunigung ist. Unter der Annahme, dass der Impuls sich nicht ändert, ergibt sich die Abschätzung

$$\Phi' = \Phi + \frac{2g^2 \hbar k^2 T^4}{3\mu_B B_0} \quad (4.35)$$

- **Wechselwirkungsenergie:** Durch die unterschiedliche Dichte zwischen dem Referenzpfad 2 und den beiden Interferometerarmen ergibt sich eine zusätzliche Phasenverschiebung

$$\Phi' = \Phi - \int_0^{2T} \frac{gn(t)}{2\hbar} dt \quad (4.36)$$

- **Strahlüberlagerungswinkel:** Werden die Strahlen für das Gitter nicht perfekt überlagert, so verändert sich der Wellenvektor durch den Winkel $\Theta = \pi + \delta$ zwischen beiden Strahlen. Dies verursacht eine Phasenverschiebung von

$$\Phi' = \Phi - \frac{2TN_B^2 \hbar k^2 \delta^2}{m} \quad (4.37)$$

4.4 Experimenteller Aufbau

Durch den begrenzten zeitlichen Rahmen der Diplomarbeit sowie durch die spätere Fokussierung auf die Untersuchung der Bloch-Oszillationen (Kapitel 5) konnte nur

ein Teil des experimentellen Aufbaues fertiggestellt und charakterisiert werden. Daher beschränkt sich dieser Abschnitt auf die Beschreibung der durchgeführten Aufbauten und gibt einen kurzen Ausblick auf die noch verbleibenden Arbeiten. Prinzipiell kann der experimentelle Aufbau des Lasersystems zur Umsetzung der verschiedenen Interferometertypen grob in vier Teilbereiche unterteilt werden:

- **Master-Laser:** Zur Bereitstellung einer möglichst stabilen Frequenzreferenz, die im Bereich von 1 – 100 GHz gegenüber der Cäsium D_2 -Linie verstimmbar sein sollte, wird ein gitterstabilisierter Diodenlaser in Littrow-Konfiguration eingesetzt.
- **Frequenzstabilisierung:** Zur präzisen und gleichzeitig flexiblen Einstellbarkeit der Masterlaser-Frequenz wird diese auf einen externen Resonator hoher Güte mithilfe des Pound-Drever-Hall Verfahrens stabilisiert.
- **Slave-Laser:** Mithilfe der weitverbreiteten Methode des *Injektion-Lockings* wird das Licht des Master Lasers mit einem leistungsstärkeren Diodenlaser (Slave-Laser) verstärkt, um genügend Leistung für die beiden Gitterstrahlen zur Verfügung zu stellen.
- **Gitterstrahl Aufbau und Detektion:** Am Hauptexperiment findet die schlussendliche Überlagerung der beiden Gitterstrahlen sowie die Detektion des Kontrastsignals statt.

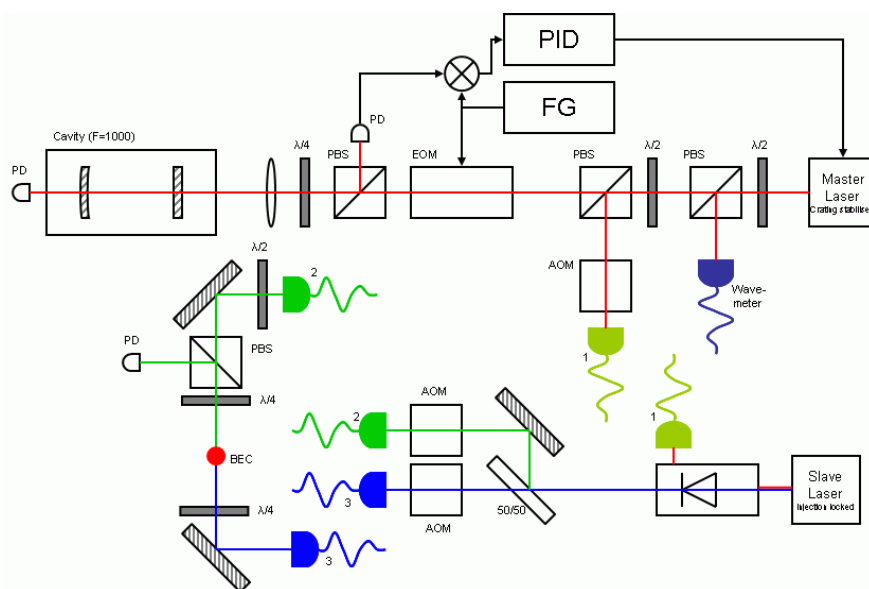


Abbildung 4.5: Schematischer Aufbau des Kontrastinterferometers. Der Master-Laser wird über die Pound-Drever-Hall Methode auf den Resonator stabilisiert. Der Slave-Laser übernimmt mittels Injektion-Locking die spektralen Eigenschaften des Master-Lasers. Über Glasfasern wird dessen Licht zum Experiment geleitet, zwei akusto-optische Modulatoren sind für die Pulserzeugung und die relative Verstimmung der zwei Gitterstrahlen zuständig.

4 Atominterferometer

In Abbildung 4.5 ist der schematische Aufbau des Gesamtsystems dargestellt. Im Folgenden gehe ich nun genauer auf die einzelnen Teilbereiche und die durchgeführten ersten Messungen der Teilsysteme ein.

4.4.1 Master-Laser

Der Master-Laser mit Laserdiode, Temperaturstabilisierung und dem Rückkopplungsgitter in Littrow-Aufbau entspricht dem in unserer Arbeitsgruppe bereits mehrfach bewährtem Aufbau, wobei ich hier für Details auf [Unt05] referenzieren möchte. Der optische Aufbau um den Masterlaser (Abbildung 4.6) ist ebenfalls bereits vielfach eingesetzt und benötigt daher nur eine kurze Beschreibung.

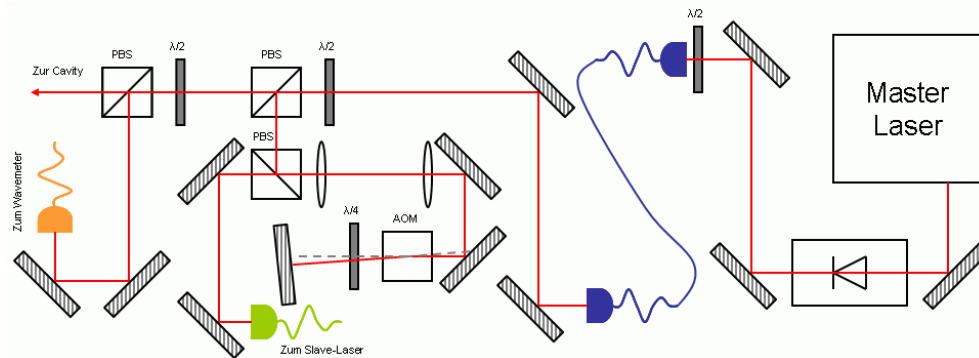


Abbildung 4.6: Aufbau des Master-Lasersystems. Nach der optischen Diode erfolgt eine 'Modenreinigung' mit einer kurzen Glasfaser. Ein Teil des Master-Lichts wird über eine Doppelpass-AOM-Konfiguration zum Slave-Laser geleitet. Ein weiterer Teil wird zur Wellenlängenmessung über eine Glasfaser zu einem Wavemeter transportiert.

Der Strahl wird zuerst durch eine optische Diode geleitet, um eventuelle Rückreflexe, die zu Instabilität oder sogar Beschädigung des Diodenlasers führen könnten, zu vermeiden. Dann erfolgt eine Einkopplung in eine kurze Glasfaser, die durch ihre Eigenschaft, nur die räumliche Grundmode weiterzuleiten, eine 'Modenreinigung' am nicht perfekten Modenprofil des Diodenlasers vornimmt. Gleichzeitig wird die Nachjustage des gesamten Aufbaues bei Veränderung der Laserfrequenz (welche durch Veränderung des Gitterwinkels einen Strahlversatz bewirkt) wesentlich vereinfacht.

Ein Teil des Strahles wird danach abgezweigt, in einer Doppelpass-AOM-Konfiguration um 2×80 MHz frequenzverschoben und anschließend in eine Faser eingekoppelt, die zum Slave-Laser geführt wird. Durch die Frequenzverschiebung ist später eine einfache Überprüfung, ob der Slave-Laser richtig auf den Master-Laser stabilisiert ist, durch eine Schwebungsmessung bei Überlagerung beider Laserfrequenzen möglich. Ein weiterer Teil des Strahles wird direkt in eine Faser eingekoppelt, die zur Messung der absoluten Wellenlänge zu einem Wavemeter geleitet wird.

Die Laserfrequenz kann einerseits durch den Diodenstrom (welcher natürlich auch die optische Ausgangsleistung beeinflusst) und andererseits durch die angelegte Spannung am Piezo des Littrow-Gitters, welche den Winkel der Rückkopplung verändert, variiert werden. Dies ist in einem Bereich von knapp 50 GHz durchführbar (Abbildung 4.7), dieser elektrisch verstimmbare Bereich kann durch eine mechanische Justierung des Rückkopplungsgitters in der Größenordnung mehrerer Nanometer um die Normfrequenz der eingebauten Laserdiode (852 nm) verschoben werden.

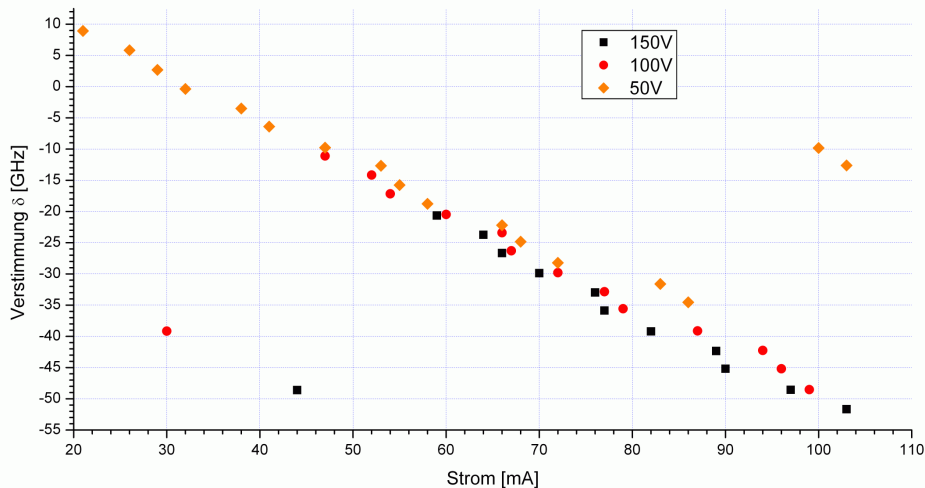


Abbildung 4.7: Verstimmbarkeit der Master-Laserfrequenz in Abhängigkeit vom Diodenstrom und der Spannung des Gitterpiezos in Relation zur D_2 Linie von Cäsium

4.4.2 Frequenzstabilisierung

Zur Frequenzstabilisierung wird in einem ersten Schritt ein Resonator (Cavity) hoher Güte verwendet, der durch eine doppelte Temperaturstabilisierung vor Temperaturschwankungen geschützt ist. Für Details zum Aufbau des Resonators möchte ich auf [Dan07] verweisen, da der prinzipielle Aufbau sowie die verwendeten Spiegel identisch sind. Die detaillierten Berechnungen der Eigenschaften solcher Resonatoren finden sich hervorragend aufgearbeitet in [Tre07]. In Tabelle 4.5 sind die Eigenschaften des aufgebauten Resonators zusammengefasst.

Zur Stabilisierung auf den Resonator wird die sogenannte Pound-Drever-Hall Methode eingesetzt [Bla01]. Dabei werden mit Hilfe eines elektro-optischen Modulators (EOM) Seitenbänder auf die Laserfrequenz aufmoduliert. Das am Resonator reflektierte Licht wird auf einer schnellen Photodiode detektiert und in ein elektrisches Signal umgewandelt. Dieses Signal erzeugt durch Mischen mit dem Modulationssignal und anschließender Filterung durch einen Tiefpaß ein brauchbares Fehlersignal zur Stabilisierung,

4 Atominterferometer

Tabelle 4.5: Resonatoreigenschaften

Resonatorlänge	100 mm
Freier Spektralbereich	1.5 GHz
Krümmungsradius Spiegel 1	250 mm
Krümmungsradius Spiegel 2	∞
Spiegelreflektivität	99.7 %
Finesse	1000
theo. Linienbreite	1.5 MHz
gemessene Linienbreite	1.8943 ± 0.023 MHz

wobei die Steigung des Signals um den Stabilisierungspunkt nur von der Linienbreite des Resonators bestimmt wird. Der gesamte optische Aufbau ist in Abbildung 4.8 dargestellt.

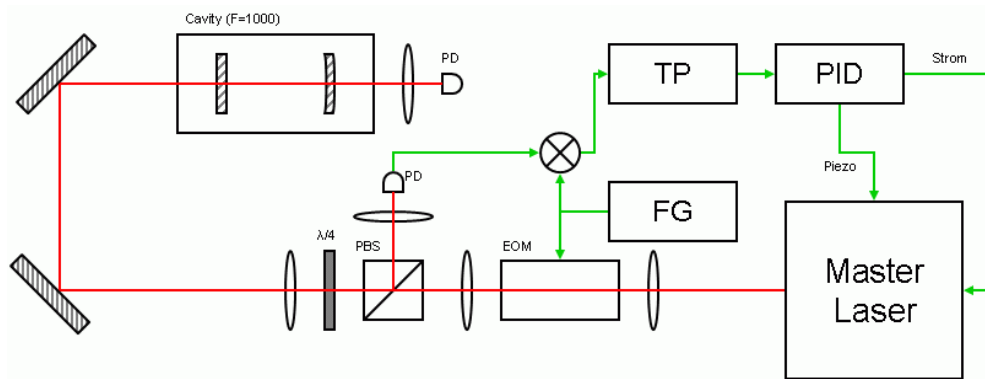


Abbildung 4.8: Aufbau der Frequenzstabilisierung mit Resonator und PDH-Methode. Ein Frequenzgenerator (FG) erzeugt eine Referenzfrequenz, die mit dem EOM auf den Strahl aufmoduliert wird. Das vom Resonator reflektierte Signal wird nach Mischen mit der Referenzfrequenz und anschließender Filterung mit einem Tiefpaß (TP) als Eingangssignal eines PID-Reglers zur Stabilisierung des Master-Lasers verwendet.

Das Fehlersignal, welches von der Resonatorlinienbreite Γ , der Modulationsfrequenz Ω sowie der Verstimmung Δ der Laserfrequenz gegenüber der Resonatorlinie ist, ergibt sich zu

$$S(\Delta) = C \cdot \frac{\Gamma \Delta \Omega (\sin(\varphi) \Gamma (\Gamma^2 + \Delta^2 + \Omega^2) + \cos(\varphi) \Omega (\Gamma^2 - \Delta^2 + \Omega^2))}{(\Gamma^2 + \Delta^2)(\Gamma^2 + (\Delta + \Omega)^2)(\Gamma^2 + (\Delta - \Omega)^2)} \quad (4.38)$$

Dabei ist φ eine relative Phasenverschiebung zwischen den beiden am Mischer anliegenden Signalen. In Abbildung 4.9 ist das mit dem Aufbau gemessene Fehlersignal dargestellt.

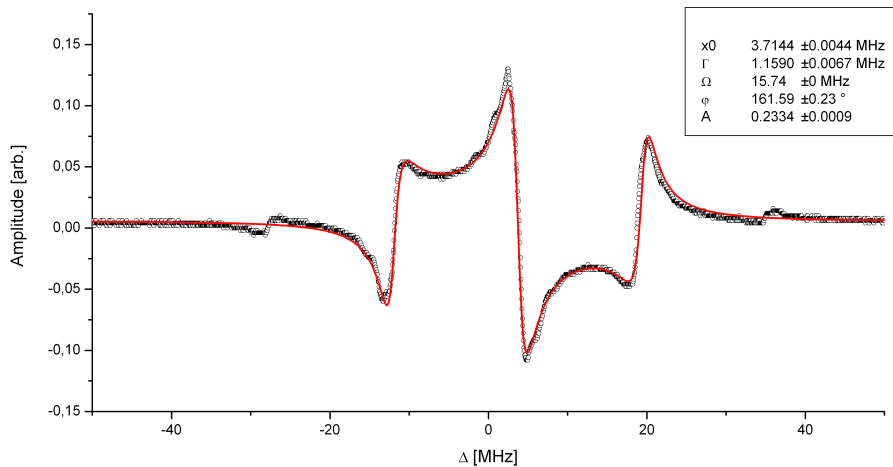


Abbildung 4.9: Gemessenes PDH-Fehlersignal. Die aus dem Fit ermittelte Linienbreite des Resonators $\Gamma = 1.159$ MHz ist kleiner als die mit einer anderen Methode gemessene Linienbreite in Tabelle 4.5 und ebenfalls kleiner als die theoretisch erwartete Breite. Da diese Messmethode sehr präzise ist, ist wahrscheinlich die Spiegelreflektivität und somit die Finesse der Cavity höher als angegeben.

Dieses Fehlersignal bildet das Eingangssignals eines PID-Reglers, der die Laserfrequenz einerseits mit der Piezo-Spannung und andererseits durch Modulation des Diodenstromes regelt. Die mit diesem Aufbau erreichbaren Linienbreiten liegen deutlich unter 100 kHz.

4.4.3 Slave-Laser

Durch die Methode des Injection-Locking übernimmt der leistungsstärkere (bis max. 150 mW) Slave-Laser die spektralen Eigenschaften des Master-Lasers und stellt eine Maximalleistung von ca. 140 mW nach der optischen Diode zur Verfügung. Der optische Aufbau um den Slave-Laser ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

Nach dem optischen Isolator wird der Strahl aufgeteilt und durch zwei akusto-optische Modulatoren (AOM) geleitet, die zur Leistungsregelung und zur relativen Verstimmung der Strahlen verwendet werden können. Zur Ansteuerung der AOMs wird eine Kombination aus einem programmierbaren digitalen Signalgeber (DDS - Direct Digital Synthesizer) und einem RF-Leistungsverstärker verwendet.

Mit diesen DDS ist eine exakte Steuerung der relativen Frequenz im Hertz-Bereich und der jeweiligen Amplituden möglich. Zum Abschluss werden beide Strahlen in Fasern eingekoppelt, mit denen sie dann zum Hauptexperiment geleitet werden, wo ca. 40 mW pro Strahl verfügbar sind.

4 Atominterferometer

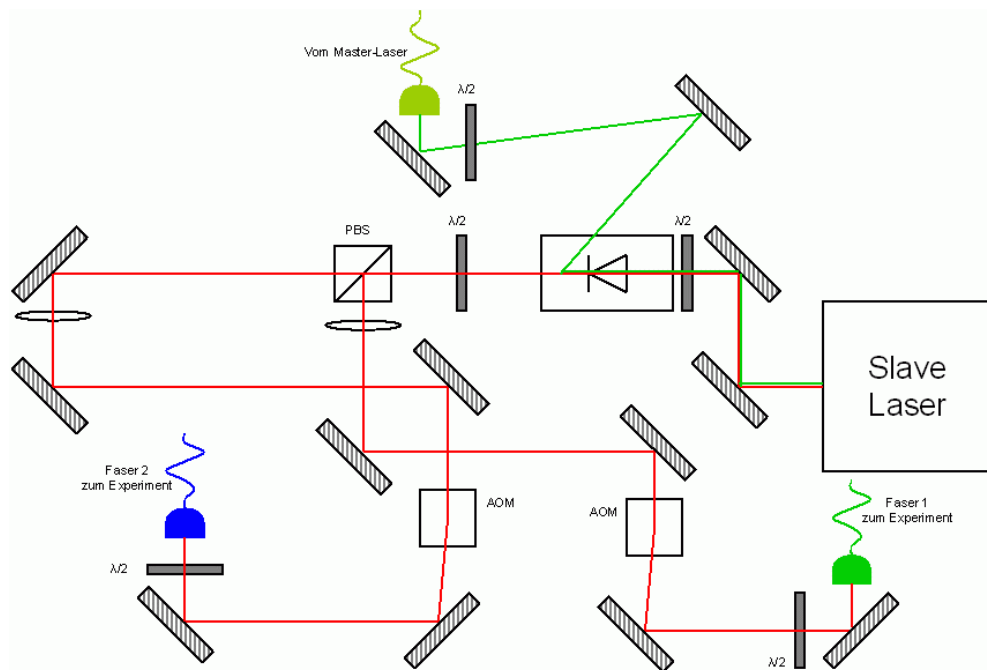


Abbildung 4.10: Aufbau des Slave-Lasersystems. Nach der optischen Diode, die auch zur Einkopplung des Master-Lichts verwendet wird, wird der Strahl aufgeteilt, durch zwei AOMs geleitet und anschließend in zwei Glasfasern eingekoppelt, die zum Hauptexperiment führen.

4.4.4 Gitterstrahl Aufbau und Detektion

Der Aufbau dieses Abschnittes wurde zugunsten der Messungen zu den Bloch-Oszillationen (Kapitel 5) noch nicht durchgeführt. Daher beschreibe ich kurz die noch durchzuführenden Arbeiten.

Nach der Auskopplung der beiden Strahlen muss deren Polarisation mittels polarisationsabhängiger Strahlteiler (PBS) auf rein linear polarisiertes Licht gefiltert werden. Danach wird mittels eines Pick-off Spiegels ein kleiner Teil des Lichtes abgezweigt und mittels Photodiode einer Intensitätsregelung zur Verfügung gestellt. Die Strahlen werden dann über Spiegel in die Experimentier-Glaszelle geschickt und so gut als möglich überlagert. Die Grobjustage kann dabei mittels der Optimierung der Einkopplung eines Strahles in die Faser des anderen Strahles erfolgen.

Die Feinjustage der Strahlen wird z.B. über die Bildung einer Dipolfalle für die kalte Atomwolke durchgeführt. Das reflektierte Licht des Auslesepulses wird in einem ersten Schritt von einer Photodiode aufgesammelt werden, je nach erreichbarem Signal-zu-Rauschverhältnis wird auch der Einsatz einer Photomultipliertube (PMT) angedacht.

KAPITEL 5

Bloch-Oszillationen

Felix Bloch entwickelte 1929 aufbauend auf der Quantentheorie ein Modell für Elektronen im Festkörper [Blo29]. Im Fall, dass die Elektronen einer konstanten Kraft ausgesetzt werden, sagte das Modell periodische Schwingungen im Impulsraum voraus. Diese sogenannten *Bloch-Oszillationen* (BO) konnten bei Elektronen in natürlichen Materialien nicht nachgewiesen werden, da die Streuung an Defekten im Kristallgitter bereits nach einem Bruchteil einer Oszillationsperiode zur Zerstörung der BO führt. Mit der Hilfe eines aus Halbleitermaterialien erzeugten 'Superlattice' gelang 1993 erstmals der Nachweis der BO von Elektronen durch die dadurch emittierte Strahlung im THz-Bereich [Was93].

Durch den Umstand, dass dieses Modell nur auf einem periodischen Potential und darin befindlichen Teilchen aufbaut, kann es ebenso für ultrakalte Atome in einem optischen Gitter angewendet werden. Dies konnte 1996 im Experiment durch direkten Nachweis der BO auch bestätigt werden [BD96]. Da die BO eine Oszillation im Impulsraum darstellen, ist eine sehr schmale Impulsverteilung für die Beobachtung notwendig, daher bietet sich die Verwendung eines BECs an. Die ersten BO eines BEC im optischen Gitter wurden auch bereits 1998 beobachtet [And98], allerdings stellte sich die Wechselwirkung im BEC als großer Störfaktor heraus.

Die Wechselwirkung, die in einem BEC aufgrund der höheren Dichte wesentlich größer als in einem nichtkondensierten Gas ist, führt zum sogenannten *Dephasing* d.h. zu einem Dephasieren und damit im Endeffekt zu einer schnellen Verbreiterung der Impulsverteilung. Für typische Wechselwirkungsstärken und Dichten ist das Ensemble bereits nach einigen zehn Oszillationen dephasiert und die BO sind nicht mehr sichtbar. Daher wurde die bislang größte Anzahl nachgewiesener BO (4000 Oszillationen in ca. 7 s) nicht mit einem BEC, sondern mit einem ultrakalten Gas aus ^{88}Sr im nahezu wechselwirkungsfreien Regime erreicht [Fer06].

In unseren Experimenten laden wir ein Cäsium-BEC mit ca. 10^5 Atomen adiabatisch in ein vertikales Gitter, erzeugt aus zwei 1064 nm-Laserstrahlen. Der Einschluss in der horizontalen Ebene wird durch einen zusätzlichen stärker fokkustierten 1064 nm-Strahl (Guidestrahl) kontrolliert. Nach Abschalten der magnetischen Levitation starten die BO durch das Wirken der Gravitationskraft. Nach Abschalten des Gitters wird die zum Zeitpunkt des Abschaltens vorhandene Impulsverteilung durch eine Expansionszeit in eine räumliche Verteilung umgewandelt, die mit Hilfe von Absorptionsbildern gemessen wird.

Ziel der Experimente war es, durch die hervorragende Abstimmbarkeit der Wechselwirkung von Cäsium deren Effekt auf die BO quantitativ zu vermessen. Vor allem die Geschwindigkeit der Dephasierung bzw. deren Unterdrückung bei Abschaltung der Streulänge wurden detailliert untersucht. Weiters wurden *Revival*-Phänomene der BO im nicht-wechselwirkenden Fall unter Einfluss eines zusätzlichen harmonischen Potentials beobachtet. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden ebenfalls zahlreiche numerische Simulationen zum besseren Verständnis der experimentellen Ergebnisse durchgeführt. Der Großteil der experimentellen Ergebnisse wird auch in einer bereits eingereichten Veröffentlichung diskutiert [Gus07].

Für umfangreichere Betrachtungen der allgemeinen Dynamik in optischen Gittern und der Theorie der BO möchte ich auf zwei ausgezeichnete Review-Artikel [Kol04, Mor06] und auf die Doktorarbeit von Thomas Anker [Ank05] hinweisen.

5.1 Bandstruktur und Wannier-Funktionen

5.1.1 Bandstruktur und Bloch-Funktionen

Im Folgenden betrachten wir den eindimensionalen Fall eines Teilchens im Potential

$$V_{ext}(z) = -s \cdot E_r \cos^2(kz) \quad (5.1)$$

Dabei entspricht s der Potentialtiefe der Gittertöpfe in Einheiten der Photonen-Rückstoßenergie E_r . Mithilfe des Bloch-Theorem kann der Ansatz zur Lösung der zugehörigen zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung als Produktzustand einer ebenen Welle und einer Funktion $u_q^{(n)}$ mit derselben Periodizität wie das Gitter geschrieben werden.

$$\phi_q^{(n)}(z) = \exp\left(\frac{iqz}{\hbar}\right) \cdot u_q^{(n)}(z) \quad (5.2)$$

Dabei wird q als *Quasiimpuls* bezeichnet und $\phi_q^{(n)}(z)$ ist die *Bloch-Funktion* zum entsprechenden Quasiimpuls. Durch die Periodizität des Potentials genügt es, Quasiimpulse in der ersten *Brillouin-Zone* ($-\hbar k$ bis $+\hbar k$) zu betrachten. Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung ergibt

$$\hat{H}_B u_q^{(n)}(z) = E_q^{(n)} u_q^{(n)}(z) \text{ mit } \hat{H}_B = \frac{(\hat{p} + q)^2}{2m} + V_{ext}(z) \quad (5.3)$$

Da sowohl das Potential wie auch die Funktionen $u_q^{(n)}$ dieselbe Periodizität aufweisen, können sie einfach als Fourierreihe dargestellt werden.

$$V_{ext}(z) = \sum_l V_l \exp(i2lkz) \quad (5.4)$$

$$u_q^{(n)}(z) = \sum_{l'} c_{l'}^{(n,q)} \exp(i2l' kz) \quad (5.5)$$

5.1 Bandstruktur und Wannier-Funktionen

Die Fourier-Koeffizienten des Potentials ergeben sich durch die \cos^2 -Abhängigkeit sehr einfach zu

$$V_{-1} = V_1 = -\frac{s}{4}E_r \text{ und } V_0 = -\frac{s}{2}E_r \quad (5.6)$$

Eingesetzt in die Schrödinger-Gleichung und dargestellt in den natürlichen Einheiten des Systems (q in Einheiten von $\hbar k$ und Energien in Einheiten von E_r) ergibt sich

$$\sum_l \hat{H}_{l,l'} \cdot c_l^{(n,q)} = E_q^{(n)} c_l^{(n,q)} \text{ mit } \hat{H}_{l,l'} = \begin{cases} (2l+q)^2 - \frac{s}{2} & \text{wenn } l = l' \\ -\frac{s}{4} & \text{wenn } |l-l'| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.7)$$

Da die Fourier-Koeffizienten $c_l^{(n,q)}$ für große $|l|$ schnell klein werden, genügt es, für die numerische Berechnung der Eigenwerte $E_q^{(n)}$ und der dazugehörigen Eigenvektoren $c_l^{(n,q)}$ bei genügend großen l (typischerweise $|l| > 5$) abzubrechen.

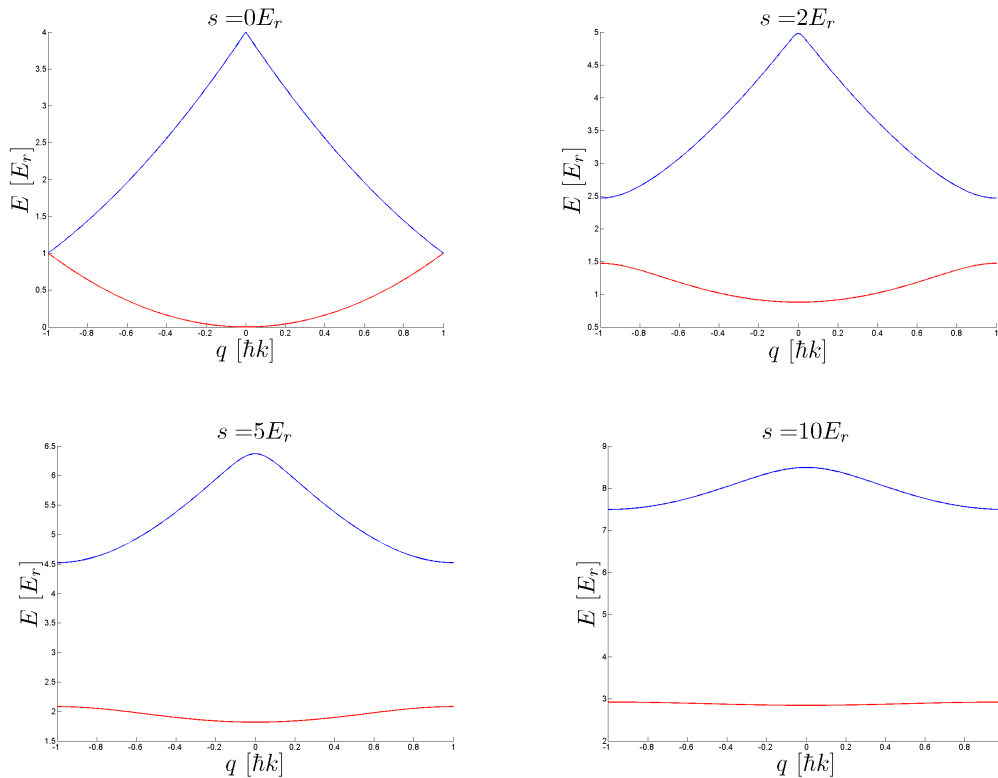


Abbildung 5.1: Bandstruktur des eindimensionalen Gitters. Dargestellt sind die ersten beiden Bloch-Bänder bei verschiedenen Gittertiefen s .

Die Energieeigenwerte nehmen dabei die Form der sogenannten *Bloch-Bänder* ein, wobei zwischen den Bändern für steigende Gittertiefen die typischen Bandlücken entstehen. Mit den Eigenvektoren können unter Verwendung der Gleichungen 5.2 und 5.5

5 Bloch-Oszillationen

die Bloch-Funktionen berechnet werden. Die Bloch-Funktionen sind dabei eine vollständige Basis für das Problem und haben zusätzlich die Eigenschaft, größtmöglich delokalisiert zu sein. Im Fall eines verschwindenden Gitters ($s = 0$) werden die Bloch-Bänder identisch mit der Vakuumdispersionsrelation und die Bloch-Funktionen gehen in normale ebene Wellen über.

5.1.2 Wannier-Funktionen

Eine alternative Basis zu den Bloch-Funktionen stellen die sogenannten *Wannier-Funktionen* dar. Sie sind maximal an einem Gitterplatz lokalisiert und berechnen sich aus der Superposition der Bloch-Funktionen. Die Wannier-Funktion am R -ten Gitterplatz mit der Normierungskonstante C und dem Abstand zweier Gitterplätze d ergibt sich zu

$$\Phi_R^{(n)}(z) = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{-\hbar k}^{\hbar k} \exp(-iRdq) \phi_q^{(n)}(z) dq \quad (5.8)$$

Die Basis aus Wannier-Funktionen ist vor allem zur Untersuchung wechselwirkungsabhängiger Effekte vorteilhaft. Die Kopplung zwischen zwei Gitterplätzen - das *Tunnel-Matrixelement* - kann entweder aus dem Überlapp zweier benachbarter Wannier-Funktionen oder aus der (energetischen) Breite des untersten Bloch-Bandes ermittelt werden [Jak98].

$$J = \frac{1}{4} \left(\max(E_q^{(0)}) - \min(E_q^{(0)}) \right) \quad (5.9)$$

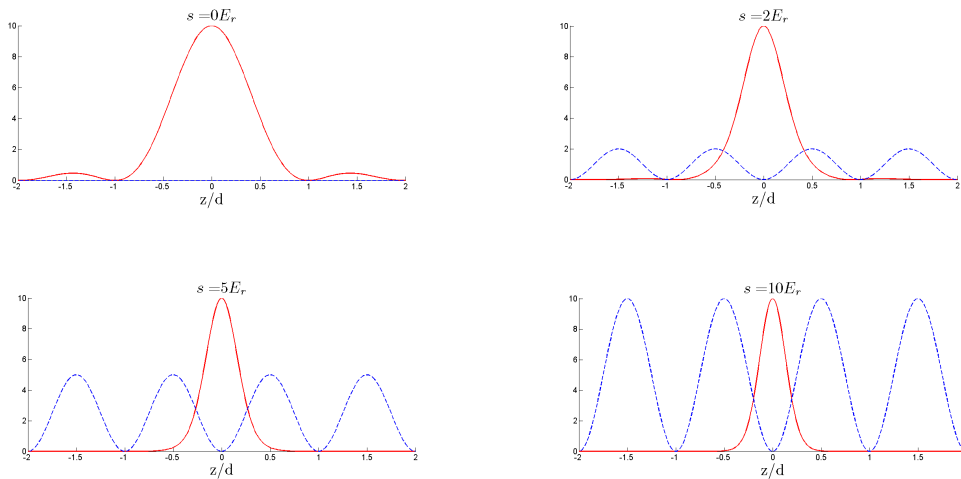


Abbildung 5.2: Wannier-Funktion um den Gitterplatz bei $R = 0$ für verschiedene Gittertiefen s . Strichliert eingezeichnet das dazugehörige schematische Gitterpotential. Man sieht deutlich die verstärkte Lokalisierung bei zunehmender Gittertiefe.

5.2 BEC im optischen Gitter

Die bisherigen Betrachtungen wurden für ein unendlich ausgedehntes Gitter sowie nur für das eindimensionale Einteilchenproblem durchgeführt. Im Experiment ist dieser idealisierte Fall natürlich nicht gegeben. Zur detaillierteren Untersuchung des Verhaltens eines 3D-BEC in einem 1D-Gitter kann man folgende zwei Fälle unterscheiden:

- **Real-1D:** Es befinden sich nur wenige Atome (typischerweise <10) pro Gitterplatz und die Bewegung senkrecht zum Gitter ist unterdrückt. Dieses Regime kann z.B. durch ein 3D-Gitter hergestellt werden. Die quantenmechanische Beschreibung findet hier im sogenannten *Bose-Hubbard-Modell* statt [Jak98].
- **Quasi-1D:** Der Einschluss senkrecht zum Gitter ist relativ schwach und die Anzahl Atome pro Gitterplatz ist hoch (typischerweise >100). Dieses Regime kann mit einem Mean-Field Ansatz beschrieben werden d.h. im Prinzip mit der Gross-Pitaevskii-Gleichung [Mor06].

Da unsere Untersuchungen sich bisher auf den Quasi-1D Fall konzentriert haben, werde ich mich auf die Beschreibung des BECs in diesem Regime beschränken. Der Einschluss senkrecht zum Gitter wird dabei durch die entsprechende Fallenfrequenz ω_{\perp} beschrieben.

5.2.1 1D-Näherung der Gross-Pitaevskii-Gleichung - NPSE

Zur Untersuchung der Dynamik in einem 1D-Gitter ist es sinnvoll, zunächst die Bewegung der Atome senkrecht zum Gitter zu vernachlässigen, d.h. die allgemeine 3D-GP-Gleichung in einen 1D-Fall umzuschreiben. Dazu wählt man den Ansatz, die Wellenfunktion als Produkt einer radialen Wellenfunktion Ψ_r und einer Wellenfunktion entlang des Gitters Ψ_z darzustellen.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_r(r, t, \sigma(z, t)) \cdot \Psi_z(z, t) \quad (5.10)$$

Die radiale Wellenfunktion wird dabei als Gaussfunktion mit variabler Breite $\sigma = \sigma(z, t)$ angesetzt, wobei die Abhängigkeit vom z und t implizit über die Dichte der Wellenfunktion $\Psi_z(z, t)$ gegeben ist.

$$\Psi_r(r, t, \sigma(z, t)) = \frac{\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma(z, t)^2}\right)}{\sqrt{\pi}\sigma(z, t)} \quad (5.11)$$

Mittels des Variationsprinzips ergibt sich nach [Sal02] aus Gleichung 2.14 eine effektive 1D-Gleichung für $\Psi_z(z, t)$.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_z(z, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{gN |\Psi_z(z, t)|^2}{2\pi\sigma_{\perp}^2 \alpha} + \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right) \Psi_z(z, t) \quad (5.12)$$

5 Bloch-Oszillationen

$\sigma_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ ist dabei die Oszillatorlänge in radialer Richtung, der Parameter α ergibt sich durch das Verhältnis¹ von der tatsächlichen Breite zur Oszillatorlänge zu

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\perp}^2} = \sqrt{1 + 2aN |\Psi_z(z, t)|^2} \quad (5.13)$$

Gleichung 5.12 ist ein Beispiel für eine *Non-Polynomial Nonlinear Schrödinger Equation* und wird im Verlauf dieser Arbeit als NPSE bezeichnet. Zur numerischen Auswertung der NPSE kann z.B. die *Split-Step Fourier Methode* angewendet werden. Diese zeichnet sich durch ihre einfache Implementierung sowie durch ihre Schnelligkeit aufgrund der Verwendung von Fast-Fourier-Transformationen (FFT) aus. Eine genauere Beschreibung dieser Methode folgt in Kapitel 5.3.

5.2.2 Diskrete 1D-Näherungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung

Für tiefe Gitter ist es möglich, eine weitere Vereinfachung durchzuführen. Unter der Annahme, dass das chemische Potential pro Gitterplatz kleiner als die harmonische Oszillatorenergie entlang des Gitters ist, genügt es, die Anzahl der Atome und die Phase des Mini-Kondensates pro Gitterplatz zu kennen. Die Gesamtwellenfunktion wird dabei als Summe einzelner Wellenfunktionen pro Gitterplatz mit einer Amplitude Ψ_n dargestellt:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{N} \sum_n \Psi_n(t) \Phi_n(\vec{r} - \vec{r}_n) \quad (5.14)$$

Sehr schwache Wechselwirkung - DNLSE

Unter der Annahme, dass die Wechselwirkung sehr klein gegenüber den restlichen Energien im System ist ($\hbar\omega_{\perp} \gg \mu_{loc}$), kann die Wellenfunktion mit einer 3D-Gaussfunktion, die unabhängig von der Teilchenzahl und somit an jedem Gitterplatz gleich ist, beschrieben werden. Über alle drei Raumrichtungen integriert ergibt sich schlussendlich die *Discrete NonLinear Schrödinger Equation* (DNLSE) zu [Tro01]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t) = -J (\Psi_{n-1}(t) + \Psi_{n+1}(t)) + \left(V_{ext}(n) + \frac{gN |\Psi_n(t)|^2}{(2\pi)^{(3/2)} \sigma_{\perp}^2 \sigma_{latt}} \right) \Psi_n \quad (5.15)$$

Dabei ist $\sigma_{latt} = \sqrt{\hbar/m\omega_{latt}}$ die Oszillatorlänge bei harmonischer Näherung des Gitterpotentials mit $\omega_{latt} = 2\sqrt{s}E_r/\hbar$ und J bezeichnet das Tunnel-Matrixelement aus Gleichung 5.9. Die DNLSE ist aufgrund ihrer Annahmen nur bei sehr kleinen Wechselwirkungsenergien anwendbar, in diesem Regime ist die effektive Wechselwirkung linear von der Streulänge und der Teilchenzahl pro Gitterplatz abhängig.

¹Für typische Werte wie z.B. den Parametern des Grundzustandes aus Abbildung 5.4 beträgt dieses Verhältnis am Ort der höchsten Dichte ≈ 8 .

Sehr starke Wechselwirkung - DNL

Für den Fall hoher Atomzahlen und hoher Streulängen ist es besser, die Wellenfunktion an jedem Gitterplatz in den zwei Richtungen senkrecht zum Gitter durch eine Thomas-Fermi Verteilung zu beschreiben. Der entsprechende Thomas-Fermi-Radius ist natürlich von der Anzahl der Atome pro Gitterplatz abhängig. Entlang des Gitters kann bei $\hbar\omega_{latt} \gg \mu_{loc}$ immer noch eine Gaussfunktion angenommen werden, das System entspricht dann einer Serie von Pfannkuchen. Die in [Sme03] allgemein abgeleitete *Discrete NonLinear Equation* (DNL) ergibt sich in diesem Regime zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t) = -J(\Psi_{n-1}(t) + \Psi_{n+1}(t)) + \left(V_{ext}(n) + \sqrt{\frac{g\omega_{\perp}^2 N |\Psi_n(t)|^2}{(2\pi)^{(1/2)} \pi \sigma_{latt}}} \right) \Psi_n \quad (5.16)$$

Der große Unterschied zur DNLSE liegt in der effektiven Wechselwirkung, die nun proportional zur Wurzel der Streulänge und Teilchenzahl ist.

Schwache wie auch starke Wechselwirkung - DNPSE

Natürlich wäre eine diskrete Gleichung, die im Regime weniger Teilchen und schwacher Wechselwirkung, im Fall vieler Teilchen und starker Wechselwirkung und vor allem im Zwischenbereich gültig ist, vorteilhaft. In [Ank05] wurde dies bereits versucht, die dort erhaltene effektive Wechselwirkungsstärke liegt jedoch bei hohen Teilchenzahlen und Wechselwirkungsstärken weit über der DNL. Mit Verwendung der Grundidee aus [Ank05] kann jedoch eine brauchbare Näherung abgeleitet werden.

Dafür wird der Ansatz aus der NPSE, eine variable Gaussbreite

$$\sigma^2 = \sigma_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2aN |\Psi_z(z, t)|^2} \quad (5.17)$$

in den radialen Richtungen zu verwenden, in die DNLSE eingesetzt. Der über einen Gitterplatz integrierte Wert für $|\Psi_z(z, t)|^2$ kann durch die Bedingung, dass sich für große Teilchenzahlen N und große Streulängen die Wechselwirkungsenergie der DNL ergeben muss, ermittelt werden. Die resultierende Gleichung wird im Rahmen dieser Diplomarbeit mit *Discrete Non-Polynomial NonLinear Schrödinger Equation* (DNPSE) bezeichnet und ergibt sich zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_n(t) = -J(\Psi_{n-1}(t) + \Psi_{n+1}(t)) + \left(V_{ext}(n) + \frac{gN |\Psi_n(t)|^2}{(2\pi)^{(3/2)} \sigma_{\perp}^2 \sigma_{latt} \alpha_D} \right) \Psi_n \quad (5.18)$$

Der Parameter α_D ist dabei das diskretisierte Gegenstück zum Faktor in der NPSE und ergibt sich zu

$$\alpha_D = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\perp}^2} = \sqrt{1 + \frac{2aN |\Psi_n(t)|^2}{2\sqrt{2}\pi\sigma_{latt}}} \quad (5.19)$$

5 Bloch-Oszillationen

Für einen direkten Vergleich eignet es sich, das Verhalten der lokalen Wechselwirkungsenergie pro Gitterplatz μ_{loc} abhängig von der Teilchenzahl pro Gitterplatz darzustellen. In Abbildung 5.3 ist das Verhalten für die drei beschriebenen diskreten Modelle aufgetragen. Man sieht, dass bei einer sehr kleinen Teilchenzahl die DNL, im Fall hoher Teilchenzahlen die DNLSE die Wechselwirkungsenergie überschätzt. Die DNPSE liegt wie erwartet im Fall kleiner Teilchenzahlen bei der DNLSE und geht Richtung steigender Teilchenzahlen in die DNL über.

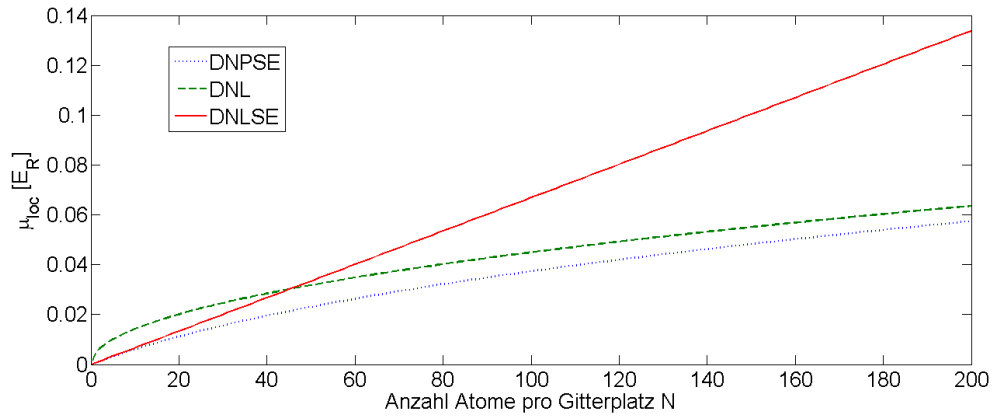


Abbildung 5.3: Wechselwirkungsenergie abhängig von der Teilchenzahl pro Gitterplatz für die DNLSE (durchgezogen), DNL strichliert) und DNPSE (punktiert). Zur Berechnung wurde eine Gittertiefe von $10 E_R$, eine senkrechte Fallenfrequenz von $2\pi \cdot 20$ Hz und eine Streulänge von $100 a_0$ verwendet.

Die Simulation dieser Gleichungen kann einfach und schnell mit Standard-Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen durchgeführt werden, näheres dazu in Kapitel 5.3.

5.2.3 Grundzustand des BECs im Gitter

Für die Betrachtung des Grundzustandes eines BECs im optischen Gitter wird angenommen, dass zusätzlich zum Gitterpotential in z -Richtung ein harmonischer Einschluss in alle drei Raumrichtungen vorliegt.

Ohne das Gitterpotential nimmt das BEC das übliche Thomas-Fermi Profil im dreidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem TF-Radius $r_{TFz} = \sqrt{2\mu/m\omega_z^2}$ in z -Richtung an. Mit dem Einladen des BEC in das optische Gitter wird es auf die einzelnen Gitterplätze verteilt, wodurch sich die Dichteverteilung in z -Richtung einer Serie von Wannier-Funktionen mit einer Einhüllenden annähert. Diese Einhüllende kann in einer einfachen Näherung ebenfalls als Thomas-Fermi Profil betrachtet werden. Für die Berechnung des TF-Radius wird zuerst die effektive Wechselwirkung im Gitter

ermittelt zu [Pit03]

$$g_{eff} = \frac{d}{\sqrt{2\pi}\sigma_{latt}} g \quad (5.20)$$

Daraus ergibt sich über das modifizierte chemische Potential der TF-Radius der Einhüllenden zu

$$\tilde{r}_{TFz} = \left(\frac{g_{eff}}{g}\right)^{1/5} r_{TFz} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s}\right)^{1/5} r_{TFz} \quad (5.21)$$

Diese Näherung liefert eine brauchbare Abschätzung² über die Größe des BEC nach dem Einladen in das Gitter bzw. über die Anzahl der besetzten Gitterplätze. In Abbildung 5.4 ist zum Vergleich das Ergebnis dieser Approximation mit dem numerisch berechneten Grundzustand (durch Simulation der NPSE mit imaginärer Zeit) dargestellt.

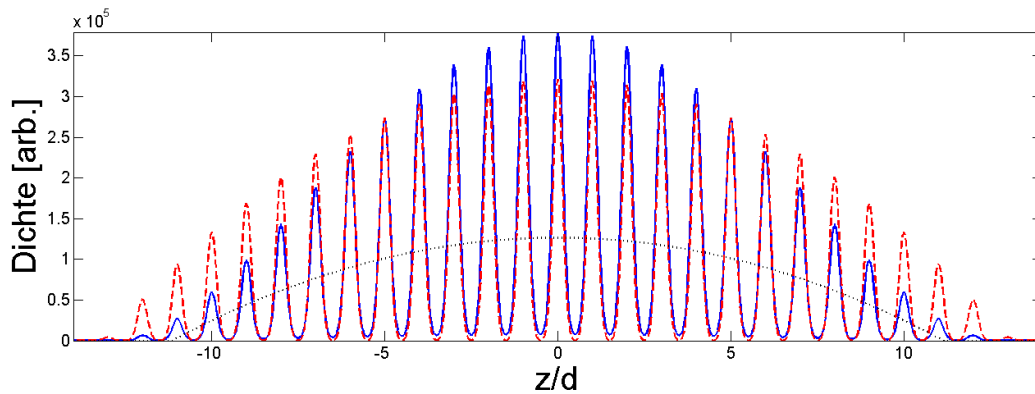


Abbildung 5.4: Grundzustand eines BEC im optischen Gitter. Die strichlierte Linie ist die analytische Näherung, die durchgezogene Linie stellt den numerisch ermittelten Grundzustand dar. Puntiert ist der Grundzustand des BEC im harmonischen Potential ohne Gitter im TF-Limit eingezeichnet. Zur Berechnung wurde eine Gittertiefe von $10 E_r$, Fallenfrequenzen von jeweils $2\pi \cdot 50$ Hz, eine Streulänge von $200 a_0$ und eine Teilchenzahl von $N = 20000$ verwendet.

5.3 Numerische Simulation

Die numerische Simulation eines Wellenpaketes in drei Raumdimensionen mit genügend hoher Auflösung ($\hat{=}$ Anzahl diskreter Punkte) benötigt eine sehr große Rechenkapazität. Da in unserem Fall die betrachtete Dynamik hauptsächlich in einer Raumdimension stattfindet, kann eine realistische Simulation entweder mithilfe der zuvor eingeführten effektiven eindimensionalen Gross-Pitaevskii-Gleichung (NPSE) oder bei

²Bei einer Gittertiefe von $s = 10$ ergibt sich eine Vergrößerung des Thomas-Fermi Radius um $\approx 17\%$.

weiterer Vereinfachung im tiefen Gitter mit den eindimensionalen diskreten Näherungen (DNLSE, DNL und DNPSE) durchgeführt werden. Dabei liegt der Rechenaufwand für beide Methoden in einem mit aktuellen PCs erträglichen Bereich. Für die Simulation längerer Zeitentwicklungen bieten sich vor allem die diskreten Modelle an, da die benötigte Anzahl diskreter Punkte und somit die benötigte Rechenzeit um Größenordnungen kleiner ist als bei der NPSE.

Simulation der NPSE

Die Zeitentwicklung der NPSE findet mithilfe der *Split-Step Fourier Methode* statt [Fle76]. Diese basiert auf einer Näherung des quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t_0, t)$, der sich für konservative Systeme zu

$$\Psi(z, t) = \hat{U}(t_0, t) \Psi(z, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t\right) \Psi(z, t_0) \quad (5.22)$$

ergibt. Durch Aufspaltung des Hamilton-Operators in einen kinetischen und einen potentiellen Term kann der Zeitentwicklungsoperator aufgeteilt werden, wobei ein kleiner Fehler durch den Umstand auftritt, dass $[\hat{z}, \hat{p}] \neq 0$ ist. Die entstandenen Zeitentwicklungsoperatoren in z und p können durch simple Multiplikationen im Raum und im Impulsraum angewendet werden. Für den Wechsel zwischen Raum und Impulsraum wird die Fast-Fourier-Transformation (FFT) und die inverse Fast-Fourier-Transformation (iFFT) angewendet. Somit ergibt sich für einen Zeitschritt Δt die Näherung:

$$\Psi(z, t + \Delta t) = (\text{iFFT}) \hat{P}_{1/2} (\text{FFT}) \hat{Z} (\text{iFFT}) \hat{P}_{1/2} (\text{FFT}) \Psi(z, t) \quad (5.23)$$

$$\text{mit } \hat{P}_{1/2} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E(p) \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (5.24)$$

$$\text{und } \hat{Z} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E(z, t) \Delta t\right) \quad (5.25)$$

Die Aufteilung des Zeitentwicklungsoperators im Impulsraum reduziert den Fehler auf die Größenordnung Δt^3 . Zeitabhängige Potentiale wie die dichteabhängige Wechselwirkung werden im zeit- und ortsabhängigen Potential $E(z, t)$ angegeben, $E(p)$ entspricht der Dispersionsrelation freier Teilchen. Ein in MATLAB geschriebenes Programm zur Simulation der NPSE mithilfe dieser Methode findet sich in Anhang B. Der als Ausgangsbasis verwendete Grundzustand wird dabei durch Entwicklung in imaginärer Zeit ($t \rightarrow i\tau$) berechnet.

Simulation der DNLSE/DNL/DNPSE

Die numerische Simulation der unterschiedlichen Varianten diskreter 1D-Gleichungen wird in MATLAB mittels des dort zur Verfügung gestellten Differentialgleichungslösungsverfahrens durchgeführt. Dieser basiert auf dem Runge-Kutta Verfahren, wobei ich hier für Details auf [Sha97] referenzieren möchte.

Als Ausgangsbasis für die Simulationen wird wiederum zuerst der Grundzustand durch Entwicklung in imaginärer Zeit numerisch bestimmt. Ein entsprechendes MATLAB-Programm findet sich in Anhang C.

Vergleich der diskreten Modelle am Grundzustand

Zum quantitativen Vergleich der unterschiedlichen Näherungen wird der Grundzustand für die verschiedenen Modelle ausgehend von den gleichen physikalischen Randparametern berechnet. Festgelegt wurde die longitudinale Fallenfrequenz zu $\omega_z = 2\pi \cdot 30$ Hz, die radiale Fallenfrequenz zu $\omega_\perp = 2\pi \cdot 20$ Hz, ein Gitter mit Wellenlänge $\lambda = 1064$ nm und Gittertiefe $s = 10 E_r$, sowie eine Streulänge von $a = 50 a_0$ und eine Teilchenzahl von $N = 50000$ Atomen. In Abbildung 5.5 ist die resultierende normierte Peakdichteverteilung im Vergleich zum Grundzustand der 1D-NPSE aufgetragen.

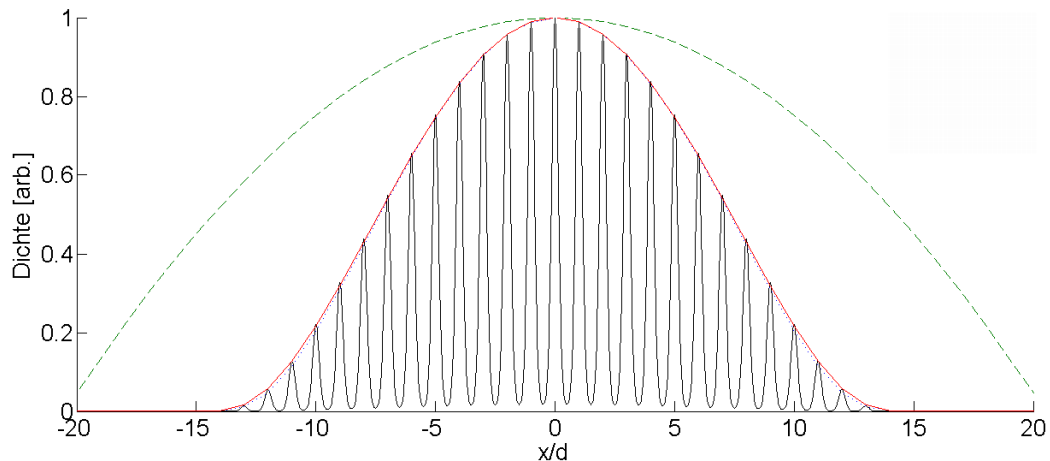


Abbildung 5.5: Vergleich des berechneten Grundzustandes zwischen den verschiedenen diskreten Modellen relativ zur NPSE. Aufgetragen sind die DNLSE (strichliert), die DNL (punktirt) und die DNPSE (durchgezogen). Zur besseren Erkennbarkeit wurden die diskreten Ergebnisse mit Linien durchzogen und mit der Peakdichte auf eins normiert.

Die DNLSE überschätzt wie erwartet die Wechselwirkung bei diesen Teilchenzahlen und Streulängen um ein Vielfaches. Die DNL und die selbst abgeleitete DNPSE erzeugen eine nahezu identische Dichteverteilung, einzig im Randbereich weicht die DNL etwas weiter vom nichtdiskreten Modell ab, was durch die in diesem Bereich etwas überschätzte Wechselwirkung durch die TF-Näherung motiviert werden kann. Somit kann sowohl die DNL als auch die DNPSE den Grundzustand eines BEC mit Wechselwirkung im Gitter hinreichend genau reproduzieren, die Simulation der Bloch-Oszillationen sowie der Vergleich mit den durchgeführten Messungen erfolgt in Kapitel 5.5.

5.4 Bloch-Oszillationen

Wirkt eine externe Kraft auf Atome in einem optischen Gitter, erfahren diese eine konstante Beschleunigung. Der Quasiimpuls nimmt stetig zu, bis er den Rand der Brillouin-Zone erreicht. Bei genügend großer Bandlücke d.h. bei hoher Unterdrückung von Landau-Zener-Übergängen bleiben die Atome im untersten Bloch-Band, und durch die Periodizität des Quasiimpulses laufen sie sozusagen auf einer Seite der Brillouin-Zone hinaus und kommen auf der anderen Seite wieder zurück. Die Brillouin-Zone wird also periodisch mit der Bloch-Periode

$$T_B = \frac{2\pi\hbar}{Fd} \text{ mit } F = ma \quad (5.26)$$

durchlaufen. In einem alternativen Bild erreichen die Atome am Rand der Brillouin-Zone gerade die Bedingung für einen resonanten Zwei-Photonen Bragg-Übergang, wodurch sich ihr Impuls umkehrt - siehe auch Kapitel 4.1. In den Abbildungen 5.6 und 5.7 ist eine Bloch-Oszillation im Impulsraum bzw. Quasiimpulsraum dargestellt, wobei die Abbildungen durch Simulation der NPSE erzeugt wurden.

Dabei ist der Quasiimpulsraum durch die Periodizität des Gitters auf die erste Brillouin-Zone beschränkt, die Darstellung im Impulsraum ergibt sich durch Projektion des jeweiligen Zustandes auf ebene Wellen [Den02]. Im Experiment kann je nach Ausschaltgeschwindigkeit des optischen Gitters entweder die Impulsverteilung (schlagartiges Abschalten) oder die Quasiimpulsverteilung (adiabatisches Abschalten) durch eine Time-of-Flight Messung abgebildet werden.

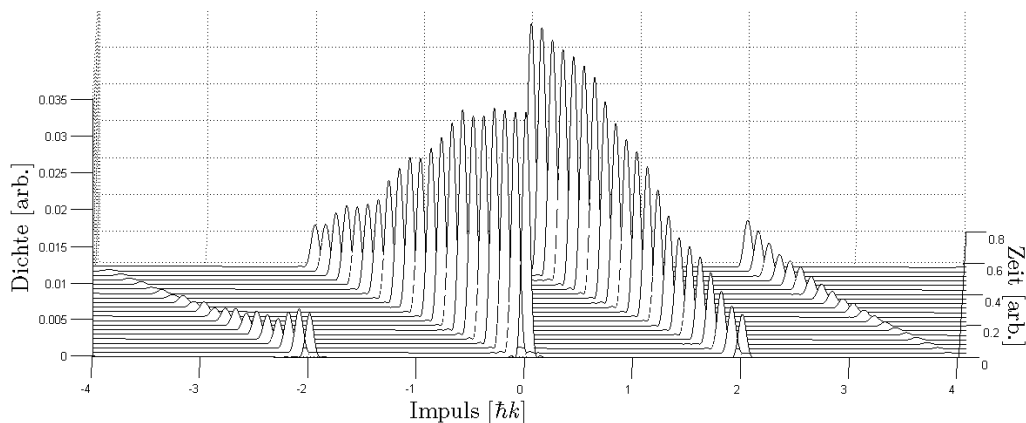


Abbildung 5.6: Bloch-Oszillation im Impulsraum. Die zwei jeweils um $\pm 2\hbar k$ verschobenen Peaks erklären sich durch die Impulskomponenten des Grundzustandes im ersten Bloch-Band, siehe dazu [Den02].

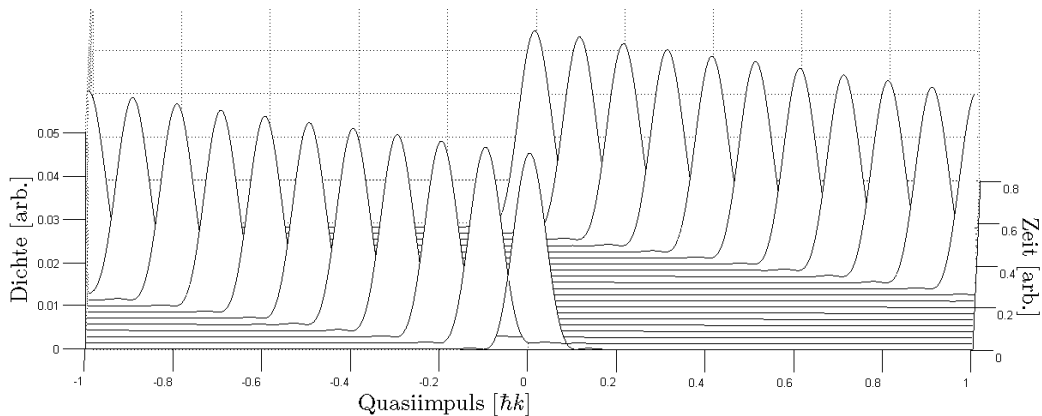


Abbildung 5.7: Bloch-Oszillation im Quasiimpulsraum. Um im Experiment den Quasiimpuls abzubilden, muss das optische Gitter adiabatisch abgeschaltet werden [Kas95].

5.4.1 Dephasingmechanismen

Theoretisch sind die BO im Fall nicht wechselwirkender Atome ein kohärenter Vorgang, der sich ohne jegliche Veränderung der Impulsverteilung fortsetzen lassen sollte. Verschiedenste Effekte wie z.B. Wechselwirkung führen im Allgemeinen dazu, dass sich die anfängliche Impulsverteilung über die Brillouin-Zone verteilt und die BO 'verschmieren'. Dieser Effekt wird als *Dephasing* bzw. Dephasierung bezeichnet.

In einer vereinfachten Betrachtungsweise kann die Wechselwirkung als zusätzliche potentielle Energie pro Gitterplatz verstanden werden, die natürlich von der Besetzungszahl abhängt. Die Energiedifferenz zwischen zwei Gitterplätzen, die normalerweise durch die Gravitation konstant ist, wird dadurch verändert. Dadurch ergibt sich pro Gitterplatz eine leicht unterschiedliche Zeitentwicklung der Phase bzw. eine unterschiedliche Bloch-Periode. Dies führt zu einer Verbreiterung der Impulsverteilung, die bis zum Erreichen des Sättigungspunktes (Verteilung über die gesamte Brillouin-Zone) proportional zur Zeit und der effektiven Wechselwirkung ist [Wit05]. Im Fall hoher Teilchenzahlen und Streulängen sollte die effektive Wechselwirkung proportional zur Wurzel aus der Streulänge (siehe Gleichung 5.16) sein.

Im Fall sehr kleiner Streulängen bzw. bei möglichst exaktem Ausschalten der Streulänge kommen weitere Effekte zum Tragen. Ein Rauschen im Magnetfeld, das die Streulänge festlegt, wird in diesem Fall über die Zeit integriert zu einer effektiven Wechselwirkung führen. Die für die Streulängenberechnung vernachlässigbare magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung gewinnt in diesem Bereich ebenfalls an Gewicht. Unabhängig von der Wechselwirkung wirken sich Phasenfluktuationen der Gitterstrahlen, die endliche Linienbreite des Gitterlasers und die Spontanemissionsrate auf längeren Zeiten negativ aus.

Im Fall hoher Streulängen gibt es Berechnungen, dass nach der erstmaligen Dephasierung eine teilweise *Rephasierung* stattfindet, was zu einem *Revival* der BO führen

würde [Wit05]. In einem echten 1D-Gitter, das mit dem Bose-Hubbard-Modell beschrieben werden kann, können diese Revivals sogar völlig kohärent sein [Kol03].

5.4.2 BO im harmonischen Gitter

Wird zum optischen Gitter und der externen Kraft ein weiteres externes Potential hinzugefügt, ändert sich ebenfalls die lokale Kraft pro Gittertopf. Im Fall eines harmonischen Potentials ändert sich die Kraft linear mit dem Abstand vom Minimum. Dieser Kraftgradient führt zu unterschiedlichen Oszillationsperioden für jeden Gittertopf und somit zu einer induzierten Dephasierung der BO selbst im Fall verschwindender Wechselwirkung.

Wie im klassischen Fall vieler Einzelpendel, die vom selben Punkt mit unterschiedlichen Frequenzen losstarten, ergeben sich abhängig vom Unterschied der Frequenzen Zeitpunkte, an denen die Pendel wieder in Phase schwingen. Im harmonischen Fall ergibt sich diese Revivalzeit bzw. die Revivalperiode zu

$$T_{rev} = \frac{2\pi\hbar}{m\omega^2 d^2} \text{ bzw. } N_{rev} = \frac{mgd}{m\omega^2 d^2} \quad (5.27)$$

mit ω der Fallenfrequenz des harmonischen Potentials [Pon06].

5.5 Durchgeführte Messungen

Der Aufbau des Lasersystems zur Erzeugung der Gitterstrahlen ist ausführlich in [Kop07] beschrieben. Für die Messung der BO wurde das vertikale Gitter durch Überlagerung eines 1064nm-Strahles mit seinem rückreflektierten Strahl erzeugt. Der Gitterstrahl hat dabei einen Strahldurchmesser von $580\mu\text{m}$, erzeugt also einen sehr geringen horizontalen Einschluss. Mit dem zweiten, dem Gitter überlagerten, vertikalen Strahl (Guidestrah) mit einem Strahldurchmesser von $256\mu\text{m}$ wird der horizontale Einschluss festgelegt. Dieser Guidestrah) ersetzt derzeit auch einen der horizontalen Dimplestrahlen während der Erzeugung des Cäsium-BECs. Dies verhindert unerwünschte Anregungen und horizontale Dynamik, da ein späteres Umladen in den Guidestrah) dadurch obsolet wird.

Nach der Erzeugung des Cäsium-BECs wie in Kapitel 3 beschrieben erfolgt das Einladen in das Gitter durch adiabatisches Einschalten der Gitterstrahlen. Nach Abschluss der Einladeprozedur ist der Grundzustand des BECs im Gitter durch die externen Fallenfrequenzen in die drei Raumrichtungen, die Gittertiefe und die vorliegende Streulänge definiert. Unter der Annahme einer einigermaßen konstanten Teilchenzahl pro Experimentzyklus liegt also immer der gleiche Zustand mit gleicher Dichte und Gitterverteilung vor. Eine schematische Darstellung eines Experimentzyklus ab der Erzeugung des BECs ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

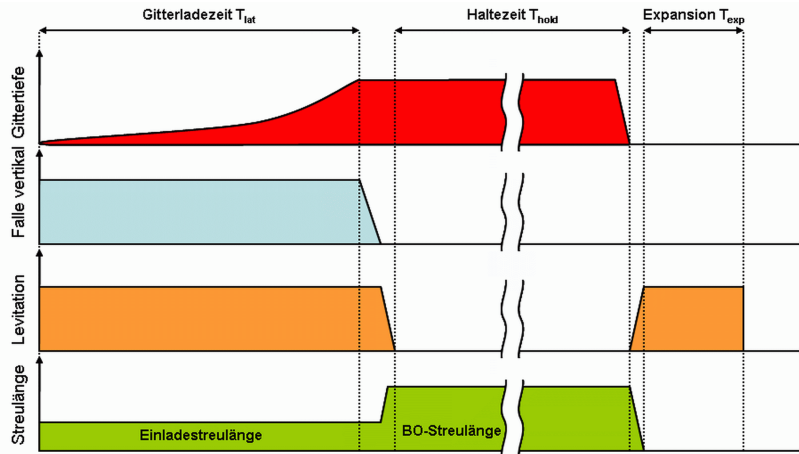


Abbildung 5.8: Ablauf eines Experimentzyklus zu den BO. Nach dem adiabatischen Einladen in das vertikale Gitter wird die vertikale Falle sowie die magnetische Levitation abgeschaltet und die zu betrachtende Streulänge eingestellt. Nach Ablauf einer variablen Haltezeit, in der das BEC BO durchläuft, wird das Gitter wieder abgeschaltet und die magnetische Levitation wieder aktiviert. Gleichzeitig wird die Streulänge auf Null gestellt und nach einer Expansionszeit erfolgt die Messung mittels eines Absorptionbildes

Zur Charakterisierung des Dephasierens wird aus dem vertikalen Dichteprofil $f(z)$ die volle Breite $\Delta p = 2 \sqrt{\text{Var}(f(z))}$ der Atomwolke in der natürlichen Einheit des Systems $\hbar k$ berechnet. Um Fehler durch z.B. Bildrauschen zu minimieren, wurde ein flexibles Auswerteverfahren entwickelt, das für jede Aufnahme das Profil zuerst leicht glättet, dann den relevanten Bildausschnitt ausschneidet und noch vorhandenes Untergrundrauschen abzieht.

Für bestimmte Aufnahmen blieb die magnetische Levitation während der Expansion ausgeschaltet, wodurch die Expansionszeit mit 27 ms aufgrund des frei fallenden BECs begrenzt ist. Dabei stellten wir im Verlauf der Messungen fest, dass die gemessene Impulsbreite zu Beginn der Oszillationen nicht mit der erwarteten Impulsbreite übereinstimmt. Die hauptsächliche Ursache war die bei dieser kurzen Expansionszeit hohe Dichte des BECs, dies führte zu einer Überschätzung der Größe, da das BEC 'optisch dicht' war [Ket99].

Durch die endlichen Abschaltzeiten der verschiedenen Potentiale (magnetische Levitation, optisches Gitter, usw.) kann das erstmalige Durchlaufen der Brillouin-Zone nicht vollständig aufgezeichnet werden, daher wird als Nomenklatur der zweite Durchlauf als erster Bloch-Zyklus bezeichnet.

In Abbildung 5.9 ist eine Aufnahmenserie dieses ersten Bloch-Zyklus zu sehen. Dabei definieren wir eine Phase ϕ der BO, wobei $\phi = 0$ den Bildern (a) und (e) entspricht, in dem die Impulsverteilung im Zentrum der Brillouin-Zone liegt. $\phi = \pi$ bezeichnet den Zeitpunkt, an dem die Impulsverteilung zur Hälfte den Rand der Brillouin-Zone

5 Bloch-Oszillationen

bereits überquert hat, wie die Doppelpeakstruktur in Bild (c) eindrucksvoll darstellt.

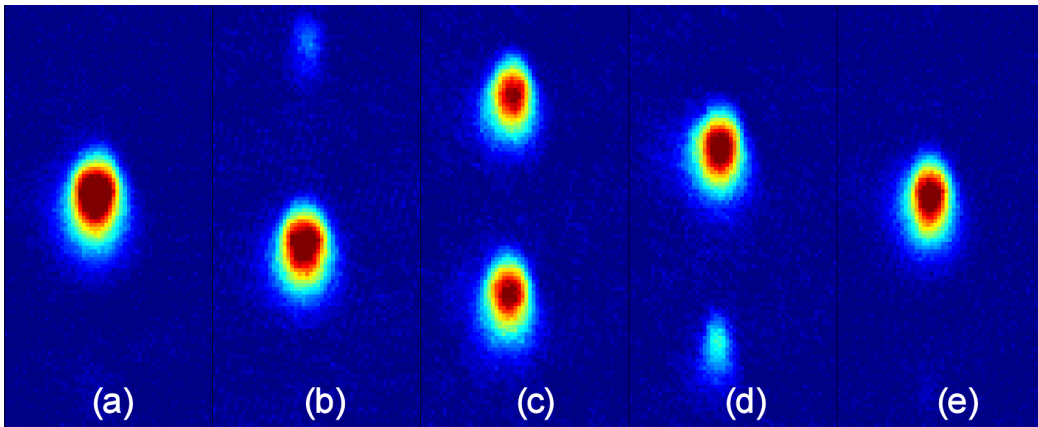


Abbildung 5.9: Aufnahme des ersten Bloch-Zyklus im Gebiet verschwindender Streulänge bei einer Expansionszeit von 27 ms. Der Abstand zwischen den Maximas der Doppelpeakstruktur entspricht $2 \hbar k$. (a)-(e) entsprechen den Bloch-Oszillationsphasen $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, s\pi$. Die Bloch-Periode ergibt sich zu $575,4 \mu\text{s}$.

5.5.1 Präzisionsmessungen bei verschwindender Wechselwirkung

Zu Beginn der Messungen wurde das Gebiet um den Nulldurchgang der Streulänge detaillierter betrachtet. Dafür wurde zunächst versucht, den eigentlichen Nulldurchgang möglichst exakt festzulegen. Da für kleine negative Streulängen, unter der Bedingung, dass das BEC immer noch stabil gegen einen Kollaps ist, ebenfalls eine Verbreiterung der Impulsverteilung festgestellt wurde, konnte dies durch Minimierung der Impulsbreite nach langen Oszillationszeiten bewerkstelligt werden.

Nachdem der ungefähre Wert des Nulldurchganges ermittelt wurde, wurde dieser detailliert vermessen. Dafür wurde ein starker horizontaler Einschluss und eine hohe vertikale Fallenfrequenz während dem Einladen in das Gitter gewählt, um mit dieser dadurch erhöhten Dichte von $\approx 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ein schnelles Dephasieren selbst bei sehr kleinen Streulängen zu erreichen.

In Abbildung 5.10 ist das Ergebnis dieser Präzisionsmessung dargestellt. Der Nulldurchgang der Streulänge ist deutlich als Minimum in den gemessenen Breiten erkennbar. Ein Datenpunkt entspricht dabei dem Mittel aus 10 Messungen. Das Magnetfeld wurde aus einer danach durchgeführten Mikrowellenspektroskopie am Hyperfeinübergang von Cäsium geeicht.

Der ermittelte Wert von $17.119(2) \text{ G}$ ist die bei weitem genaueste Vermessung des Ramsauer-Townsend-Effekts bis dato. Die Restdephasierung beim Minimum ergibt sich im Wesentlichen aus den im vorhergehenden Abschnitt 5.4 durchgeführten Betrachtungen.

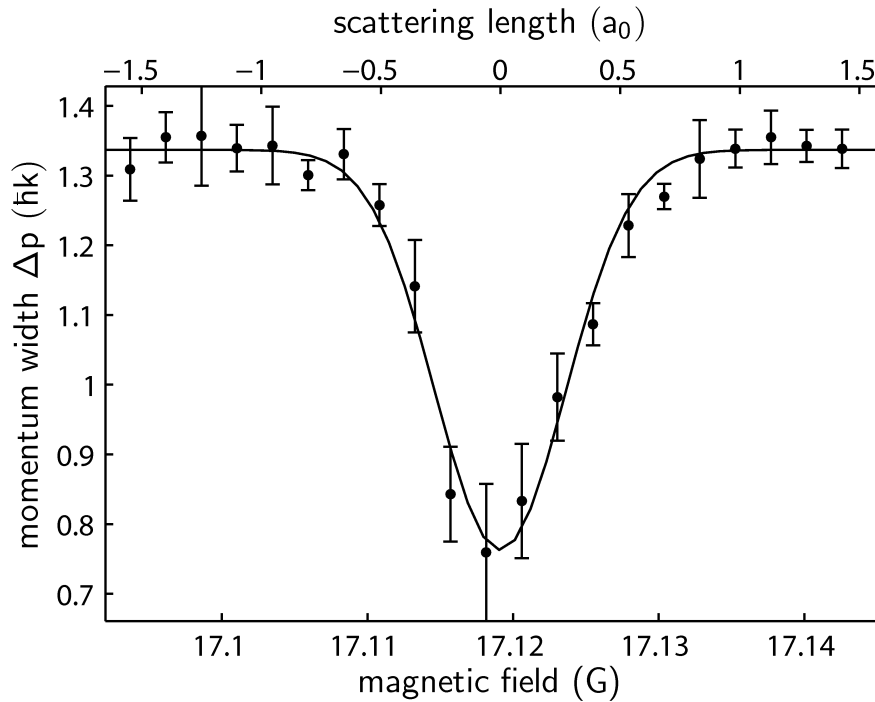


Abbildung 5.10: Bestimmung des Nulldurchganges der Streulänge von ^{133}Cs durch Messung der Impulsbreite Δp nach 6951 Oszillationsperioden bzw. ungefähr 4s. Die durchgezogene Linie ist ein Gaußfit durch die Messdaten. Dieser ergibt für die Position des Minimums 17.119(2) G. Die im Diagramm angeführten Streulängen wurden in Übereinstimmung mit diesem ermittelten Wert berechnet.

Mit der Bestimmung der minimalen Wechselwirkung konnte die Anzahl der nachweisbaren BO wesentlich gesteigert werden. Dafür wurden die folgenden Messungen bei weit geringeren Dichten von $\approx 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ durchgeführt. Das Einladen in das Gitter fand bei einer Gittertiefe von $7.9 E_r$ und Fallenfrequenzen von 10 Hz vertikal und 8 Hz horizontal statt. Das BEC wurde mit einer Streulänge von $210 a_0$ in das Gitter geladen, somit wurden ca. 60 Gitterplätze besetzt.

Abbildung 5.11 zeigt eine Serie von vier vollständigen BO nach jeweils 1, 1000, 10000 und 30000 bereits durchlaufenen Blochzyklen. Dabei entsprechen 30000 Bloch-Zyklen einer Zeit von knapp 17.5 s! Selbst nach dieser sehr langen Zeit ist die BO noch leicht erkennbar, auch wenn die Dephasierung bereits fortgeschritten ist.

Bei Analyse der Profile sind Oszillationen in der Impulsverteilung nach bis zu 50000 Bloch-Zyklen bzw. 28.7 s noch nachweisbar. Dies stellt die mit Abstand höchste Anzahl nachgewiesener BO dar und zeigt eindrucksvoll die Möglichkeiten eines BECs ohne Wechselwirkung.

Die horizontale Verbreiterung der Atomwolke, die zwischen den Bildern mit den Bloch-Zyklen 1 und 1000 erkennbar ist, wird durch den Strahl für den vertikalen

5 Bloch-Oszillationen

Einschluss verursacht. Da die vertikale Falle ebenfalls einen Einschluss in eine horizontale Richtung verursacht, ist das BEC in diese Richtung zu Beginn noch stärker komprimiert. Nach Abschaltung der vertikalen Falle wird sich die horizontale Dichteverteilung des BEC nach anfänglichen 'Atmungsoszillationen' an den nun schwächeren horizontalen Einschluss anpassen.

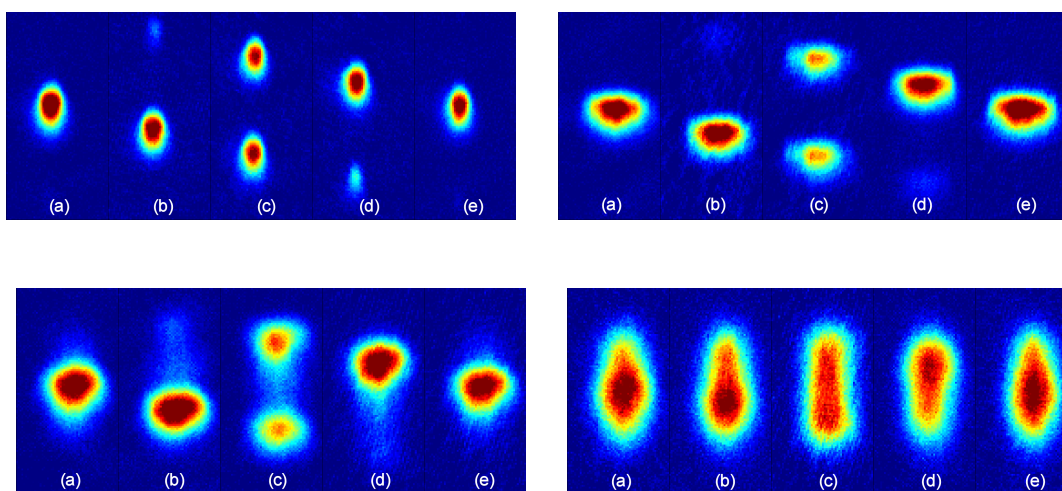


Abbildung 5.11: Dephasierung der BO bei Null Streulänge. *oben links*: Bloch-Zyklus 1, *oben rechts*: Bloch-Zyklus 1000, *unten links*: Bloch-Zyklus 10000, *unten rechts*: Bloch-Zyklus 30000.

Die genaue Bestimmung der Bloch-Periode wurde im Zuge dieser Messungen durchgeführt, wobei sich die Oszillation der Position des stärksten Peaks im Impulsraum als beste Messgröße herausstellte. Dies liegt einerseits daran, dass der Fit zur Ermittlung der Position des stärksten Peaks relativ robust gegen Rauschen bzw. Asymmetrien ist, andererseits ist die Amplitude dieser Oszillation auch im relativ stark dephasierten Regime nahezu identisch mit der Anfangsamplitude.

In Abbildung 5.12 sind die Messdaten dargestellt, die durchgezogene Linie stellt die Fitfunktion, in unserem Fall eine Sägezahnfunktion, dar. Aus dem Fit ergibt sich die Bloch-Periode zu $T_B = 575.3807(5) \mu\text{s}$. Unter der Annahme, dass keine weiteren externen Kräfte wirken, ergibt sich daraus eine lokale Gravitationsbeschleunigung von $g = 9.803820(9) \text{ m/s}^2$.

Dieser Wert liegt etwas unter dem für Innsbruck zurzeit gültigen, mit einer unterschiedlichen Methode gemessenen Wert von $g = 9.80554 \text{ m/s}^2$, was durch systematische Fehler verursacht wird. Dazu zählen zum Beispiel eine nicht perfekte Ausrichtung des Gitters gegenüber der Gravitation sowie eine möglicherweise ungenaue Bestimmung der Wellenlänge des Gitterlasers ($1064.4964(1) \text{ nm}$).

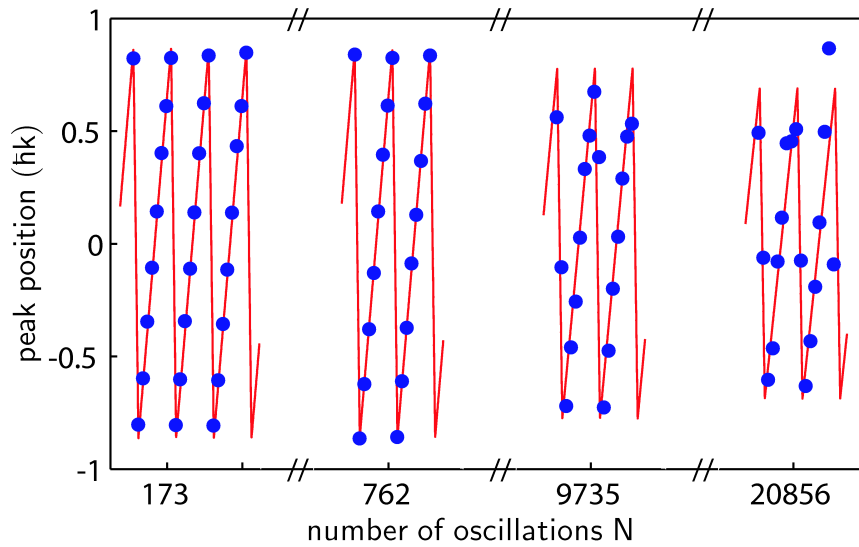


Abbildung 5.12: Messung der Bloch-Periode mithilfe der Oszillation der Position des stärksten Peaks in der Impulsverteilung. Die durchgezogene Linie ist die gefittete Sägezahnfunktion mit der Bloch-Periode $T_B = 575.3807(5) \mu\text{s}$.

Ein weiterer systematischer Effekt ist ein schwacher Magnetfeldgradient, der von den Spulen zur Erzeugung des Offsetfeldes zur Einstellung der Streulänge erzeugt wird. Eine Bestimmung der Oszillationsperiode bei unterschiedlichen Streulängen d.h. unterschiedlichen Offsetfeldern zeigte eine systematische Vergrößerung der Periode bei steigender Streulänge, was eine Verschiebung von g zu kleineren Werten zur Folge hat. Da wir für Null Streulänge bereits ein Magnetfeld von ca. 17 G benötigen, kann ein zu kleiner Wert für g erwartet werden. Durch den Umstand, dass die BO bei steigender Streulänge schnell dephasieren, kann dieser Effekt aufgrund der dadurch ungenaueren Bestimmung der Oszillationsperiode derzeit nicht detailliert vermessen werden.

5.5.2 Dephasierung der BO durch Wechselwirkung

Zur Charakterisierung der Abhängigkeit der Dephasierung von der Wechselwirkung bzw. der Streulänge wurden Messreihen in zwei Konfigurationen aufgenommen. In der ersten Konfiguration wurde bei konstanter Streulänge die Breite Δp abhängig von der Anzahl durchlaufener Oszillationen betrachtet, im zweiten Fall wurde nach einer konstanten Anzahl durchlaufener Oszillationen die Breite abhängig von der Streulänge aufgezeichnet. Die Messungen wurden mit einem Cäsium-BEC bestehend aus $5 - 6 \cdot 10^4$ Atomen durchgeführt, zum Einladen in das Gitter mit einer Gittertiefe von $7.9 E_r$ lagen Fallenfrequenzen von 10 Hz vertikal und 8 Hz horizontal vor. Das BEC wurde mit einer Streulänge von $210 a_0$ in das Gitter geladen, somit wurden ca. 60 Gitterplätze besetzt.

5 Bloch-Oszillationen

In Abbildung 5.13 ist das Ergebnis dieser Messungen dargestellt. Die durchgezogenen Linien stellen Simulationen der DNL mit den jeweiligen Werten dar, wobei hervorragende Übereinstimmung mit der Messung bei Addition eines konstanten Offsets von ca. $0.1\hbar k$ erzielt wird. Dieser Offset kann mit den endlichen Abschaltzeiten der Magnetfelder nach Abschalten des Gitters motiviert werden, da die in dieser Zeit noch vorhandene Wechselwirkung zu einer Verbreiterung der Impulsverteilung führt.

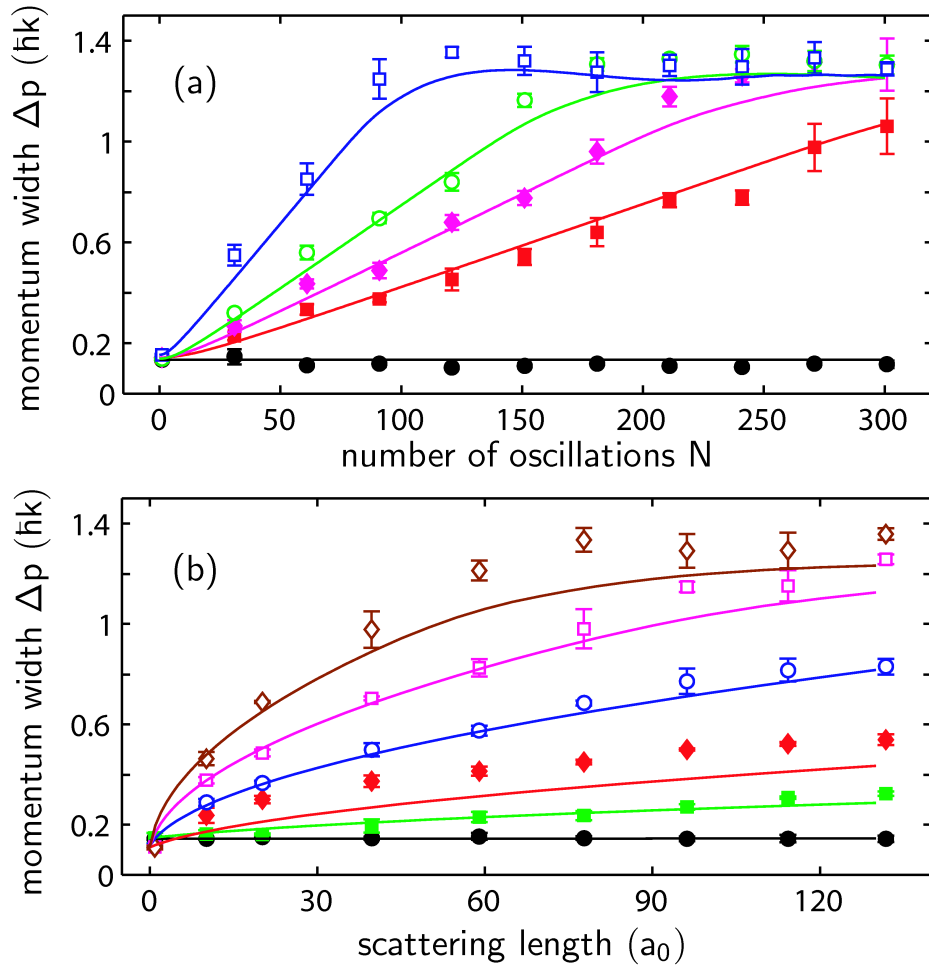


Abbildung 5.13: Messung der Abhängigkeit des Dephasierens der BO von der Streulänge. (a) Breite der Impulsverteilung Δp abhängig von der Anzahl der BO N für verschiedene Streulängen ($a = 0, 25, 50, 100, 300 a_0$, beginnend von unten (gefüllte Kreise, $0 a_0$) nach oben (leere Quadrate, $300 a_0$)). (b) Breite der Impulsverteilung Δp abhängig von der Streulänge a nach einer unterschiedlichen Anzahl von BO ($N = 1, 25, 50, 100, 150, 200$, beginnend von unten (gefüllte Kreise, $N = 1$) nach oben (leere Rauten, $N = 200$)). Alle Messpunkte sind der Mittelwert aus sieben Messreihen, die durchgezogenen Linien sind Simulationen der DNL mit den Experimentparametern $s = 7.9 E_R, \omega_{\perp} = 2\pi \cdot 8 \text{ Hz}$, $a = 210 a_0$, $N_{\text{Atome}} = 6 \cdot 10^4$ und der vertikalen Fallenfrequenz $\omega_v = s\pi \cdot 10 \text{ Hz}$.

Man sieht deutlich ein zunächst linearer Anwachsen der Impulsbreite mit der Zeit (Abbildung 5.13 (a)) und die anschließende Sättigung bei einem Wert von ca. $1.3\hbar k$. Dieser Wert entspricht in etwa der theoretischen Breite von $\Delta p = 2/\sqrt{3}$ bei gleichmäßiger Verteilung der Impulskomponenten über die Brillouin-Zone. Der lineare Anstieg der Breite mit der Zeit deckt sich hervorragend mit der theoretischen Vorhersage aus [Wit05] und den durchgeführten Simulationen.

Betrachtet man die Abhängigkeit von der Streulänge (Abbildung 5.13 (b)), so sieht man ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage, dass die Dephasierung proportional zur effektiven Wechselwirkung in unserem Regime ist. Da wir für unseren Fall von einer Serie von Pfannkuchen ausgehen, ist diese effektive Wechselwirkung proportional zur Wurzel aus der Streulänge [Sme03].

Die Abweichungen der Messpunkte von den Simulationen, vor allem bei den Datenpunkten $N = 50$ in Abbildung 5.13 (b) erklärt sich durch eine zusätzliche horizontale Dynamik, die nicht in die gezeigten Simulationen miteingeht. Diese Dynamik ist einerseits durch das Schalten der Streulänge zu Beginn der BO, andererseits durch das Abschalten der vertikalen Falle, wie bereits in Kapitel 5.5.1 angedeutet, bedingt. Durch die Schaltvorgänge werden horizontale 'Atmungsoszillationen' angeregt [Kag97].

Die sich daraus ergebenden Dichteschwankungen bewirken eine Schwankung der effektiven Wechselwirkung, die ja von der Dichte abhängt, und diese übersetzt sich in eine Schwankung der Dephasierungsgeschwindigkeit. Diese Schwankungen sind in den Daten in Abbildung 5.13 (a) erkennbar, um den Datenpunkt $N = 50$ sind auch alle Datenpunkte gegenüber der Simulation zu hoch, was zur systematischen Abweichung in Abbildung 5.13 (b) führt. Hier nicht gezeigte Simulationen mit einer zusätzlichen Modulation der horizontalen Fallenfrequenz zeigen ein ähnliches Verhalten.

Zur Vermeidung bzw. Minderung dieses Effektes müsste das Einladen in das Gitter aus einer Dreistrahl-Dipolfalle erfolgen, wobei bei Abschaltung der horizontalen Strahlen der vertikale Strahl in der Stärke angepasst werden müsste, um eine Veränderung der Fallenfrequenzen zu verhindern. Das Springen in der Streulänge kann durch eine Anpassung der Streulängen zwischen Einladen und Oszillationszeit zwar verringert werden, zu kleine Streulängen während dem Einladen würden allerdings zu hohen Teilchenverlusten aufgrund der bei hohen Dichten auftretenden Dreikörperverluste führen. Insgesamt sollte durch einen optimierten Aufbau dieser Effekt wesentlich reduziert werden können.

Substruktur im volldephasierten Regime

Eine Untersuchung der Impulsverteilung zu den Zeitpunkten, an denen die Breite bereits die Sättigung erreicht hat, zeigte eine zuerst überraschende Struktur in der Form getrennter Peaks, welche über die Brillouin-Zone verteilt sind. Diese sind nur sichtbar, da wir einerseits die Expansionszeit sehr lang wählen können (im Bereich von 100 ms) und da wir die Streulänge während dieser Expansion auf Null stellen.

5 Bloch-Oszillationen

Im einfachen Bild, in dem die Wechselwirkung als zusätzliches dichteabhängiges chemisches Potential pro Gittertopf betrachtet wird, würde sich durch die endliche Anzahl besetzter Gitterplätze ebenfalls eine endliche Anzahl von Einzelpeaks im Impulsraum ergeben. Dies ist ebenfalls konsistent mit den Betrachtungen in [Wit05], hier kommt diese Struktur ebenfalls vor und bewirkt durch konstruktive Interferenz eine teilweise Rephasierung der BO.

Auch in den durchgeführten Simulationen kommt diese Struktur zum Vorschein. Dabei hängt die Anzahl unterscheidbarer Peaks wesentlich von der Anzahl besetzter Gitterplätze ab. In einer ersten Testmessung wurde daher diese Struktur abhängig von der vertikalen Falle während des Gitterladevorganges, welche die Anzahl von besetzten Gitterplätzen maßgeblich beeinflusst, aufgenommen. Mit einer durchschnittlichen Anzahl von 50000 Atomen, einem horizontalen Einschluss von $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 32$ Hz und vertikalen Fallenfrequenzen von $\omega_v/2\pi = 33, 40, 47, 52, 57$ Hz ergeben sich 27, 24, 21, 20, 19 besetzte Gittertöpfe.

In Abbildung 5.14 sind die Absorptionssaufnahmen dieser Strukturen dargestellt, im Vergleich dazu wurden Simulationen der DNL mit denselben Parametern durchgeführt und die Impulsverteilungen als 2D-Plots aufgetragen.

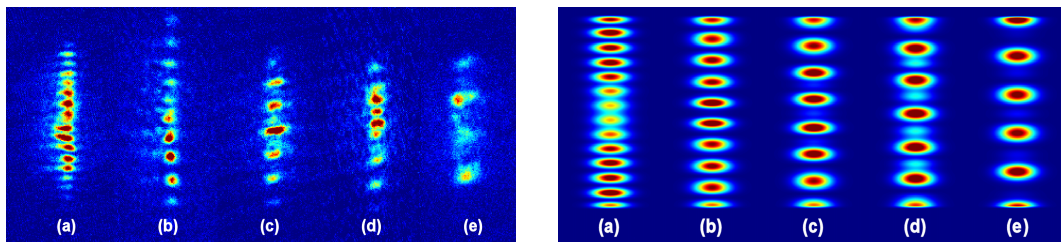


Abbildung 5.14: Struktur im dephasierten Regime nach $N = 26$ BO. (a) bis (e) entsprechen dabei vertikalen Fallenfrequenzen von $\omega/2\pi = 33, 40, 47, 52, 57$ Hz bzw. 27, 24, 21, 20, 19 besetzten Gittertöpfen. *links*: Experiment, *rechts*: Simulation mithilfe der DNL.

Durch den Umstand, dass sich diese Struktur mit der Anzahl durchlaufener Bloch-Perioden wesentlich verändert, und aufgrund des Einflusses der Anzahl der Atome sowie der Fallenparameter, die für diese Experimente noch zu stark schwanken, ist ein quantitativer Vergleich zwischen Simulation und Experiment derzeit nur schwer möglich. Durch kleine Verbesserungen am Experiment, insbesondere Stabilität der Dipolfallen, hoffen wir in naher Zukunft quantitative Resultate zu erhalten. Dabei wird auch eine genauere Analyse der Ergebnisse der Simulationen hilfreich sein, um z.B. geeignete Zeitpunkte für den Vergleich zwischen Experiment und Simulation zu bestimmen. In Abbildung 5.15 ist der zeitliche Verlauf der Impulsverteilung für zwei unterschiedliche vertikale Fallenfrequenzen während des Gitterladevorganges aufgetragen.

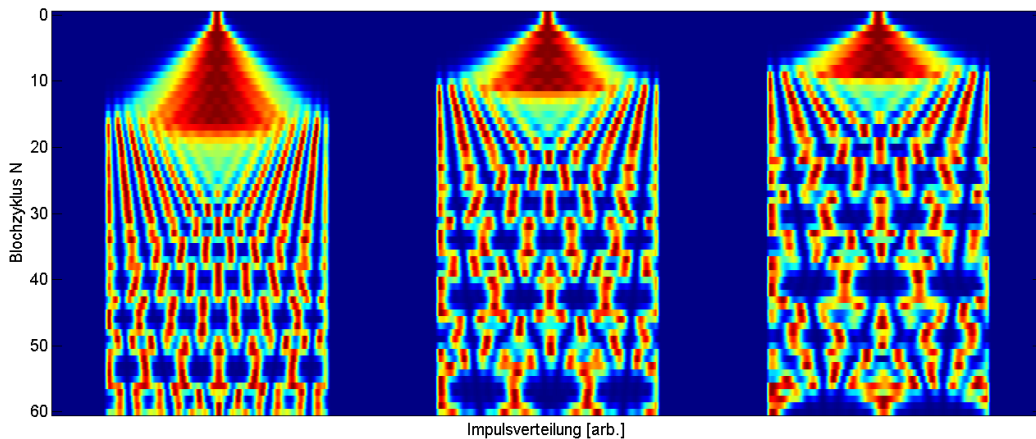


Abbildung 5.15: Berechnete Struktur der Impulsverteilung im zeitlichen Verlauf jeweils zur Phase der BO $\phi = 0$. *links*: Vertikale Fallenfrequenz $\omega/2\pi = 33$ Hz bzw. 27 Gittertöpfe. *mitte*: Vertikale Fallenfrequenz $\omega/2\pi = 47$ Hz bzw. 21 Gittertöpfe. *rechts*: Vertikale Fallenfrequenz $\omega/2\pi = 57$ Hz bzw. 19 Gittertöpfe.

Der qualitative Unterschied in den Strukturen ist deutlich erkennbar. Ein interessanter Aspekt, der noch genauer geklärt werden muss, sind die leichten Asymmetrien, die auf ein chaotisches Verhalten hindeuten und wahrscheinlich zur Zerstörung der theoretisch vermuteten Revivalphänomene führen.

5.5.3 Dephasing und Revival im harmonischen Potential

Im Fall verschwindender Wechselwirkung und für genügend kurze Zeiten, in denen andere Effekte noch nicht zur Dephasierung führen, kann z.B. der Einfluss eines zusätzlichen harmonischen Potentials in vertikaler Richtung auf die BO untersucht werden. Wie in Kapitel 5.4.2 bereits besprochen, kommt es aufgrund der unterschiedlichen Kraft pro Gitterplatz zu einer induzierten Dephasierung. Nach einer vom harmonischen Potential definierten Zeit kommt es zu einem Wiederaufleben ('Revival'), d.h. die Oszillationen werden wieder deutlich sichtbar. Danach verschwinden die BO wieder, um immer zu Vielfachen der Revivalzeit wieder aufzutauchen [Pon06].

In Abbildung 5.16 ist die mit der DNL simulierte Impulsverteilung zu jeweils ganzzahligen Vielfachen der BO-Phasen $\phi = 0$ und π dargestellt. Deutlich zu erkennen ist das Revival der BO nach ca. 160 ms bzw. 280 Oszillationsperioden, bestimmt durch die in der Simulation verwendete vertikale Fallenfrequenz von $\omega_v = 2\pi \cdot 40.8$ Hz. Dazwischen zeichnen sich deutliche Strukturen ab, die durch die teilweise Rephasierung einzelner Gitterplätze erzeugt wird. Zur halben Revivalzeit ist jeder zweite Gitterplatz wieder in Phase, dadurch entsteht die Doppelpeakstruktur.

5 Bloch-Oszillationen

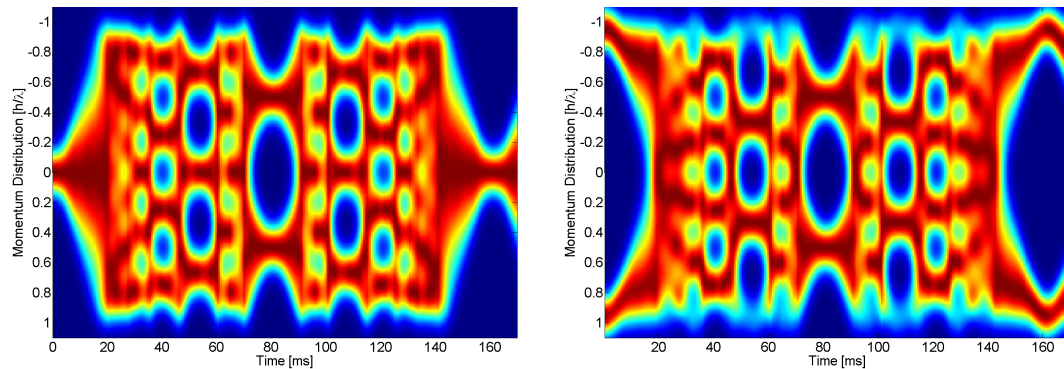


Abbildung 5.16: Simulation der Revival im wechselwirkungsfreien Fall. *links*: Impulsverteilung jeweils zur Phase der BO $\phi = 0$. *rechts*: Impulsverteilung jeweils zur Phase der BO $\phi = \pi$. Als vertikale Fallenfrequenz wurden $\omega_v = 2\pi \cdot 40.8$ Hz verwendet.

Für die Messung, dargestellt in Abbildung 5.17, wurde die Streulänge nach dem Einladen in das Gitter auf Null gesetzt. Die relativ große Breite im nichtdephasierten Zustand erklärt sich durch den Umstand, dass diese Messung noch ohne Levitation bei der Expansion durchgeführt wurde und daher die Breite durch die hohe Dichte überschätzt wurde.

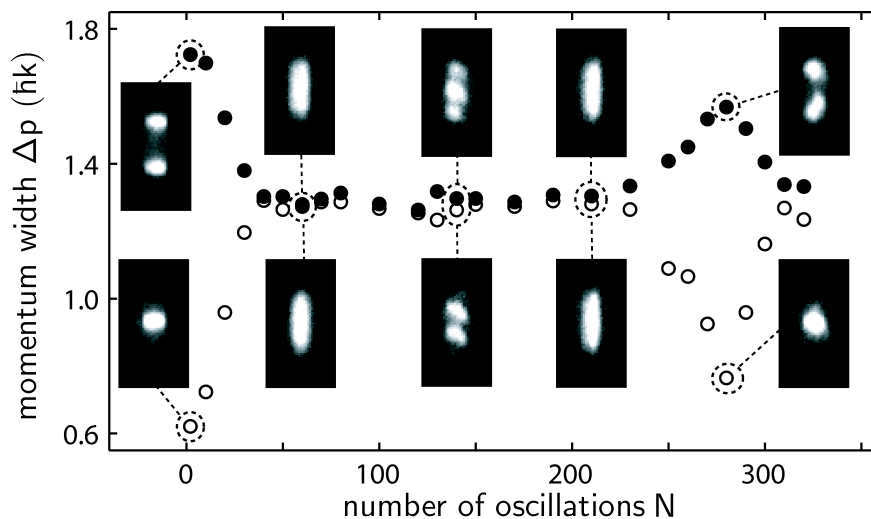


Abbildung 5.17: Messung des Dephasierens und anschließendem Revival der BO im wechselwirkungsfreien Regime. Die ausgewählten Absorptionbilder zeigen die Impulsverteilung zu den bestimmten Zeitpunkten jeweils zu unterschiedlichen Phasen der BO. Die gefüllten Kreise entsprechen der maximalen Impulsbreite, die leeren Kreise der minimalen Impulsbreite während einer Bloch-Periode. Die vertikale Fallenfrequenz beträgt $40(1)$ Hz.

5.5 Durchgeführte Messungen

Die gemessene Revivalzeit von $T_{rev} \approx 160$ ms bzw. $N_{rev} \approx 280$ ist in hervorragender Übereinstimmung mit dem erwarteten Wert, der sich aus der gemessenen Fallenfrequenz von $\omega_v = 40(1)$ Hz ergibt. Die aus den Simulationen hervorgehende Struktur ist trotz der kurzen Expansionszeit z.B. zur halben Revivalzeit mit den Doppel- und Dreifach-Peaks deutlich zu erkennen, wobei die Dreifach-Peaks der Doppel-Peakstruktur entsprechen, nur eine Viertel-BO-Periode verschoben.

Generell fiel bei dieser Messung der Umstand auf, dass die Phase der BO nach der erstmaligen Dephasierung und insbesondere beim ersten Revival stark schwankte. Daher konnten die gemessenen Punkte nicht den Phasen der BO $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ zugeordnet werden. Insofern erklärt sich somit auch das Auftauchen der Dreifach-Peak-Struktur, die genau zwischen diesen Phasen liegt.

Mithilfe der Simulationen gelang es, den Grund dieser Phasenschwankungen festzustellen. In Abbildung 5.18 sind zwei Simulationen dargestellt, die sich nur durch die Position des vertikalen Fallenzentrums relativ zu einem Gitterplatz unterscheiden. Liegt das Fallenzentrum genau auf einem Gitterplatz, ist die Phase der BO beim ersten Revival um π verschoben, erst beim zweiten Revival stimmt die Phase wieder mit dem Fall, dass das Fallenzentrum genau zwischen zwei Gitterplätzen liegt, überein. Auch bei den Teil-Revivals ist die Phase verschoben.

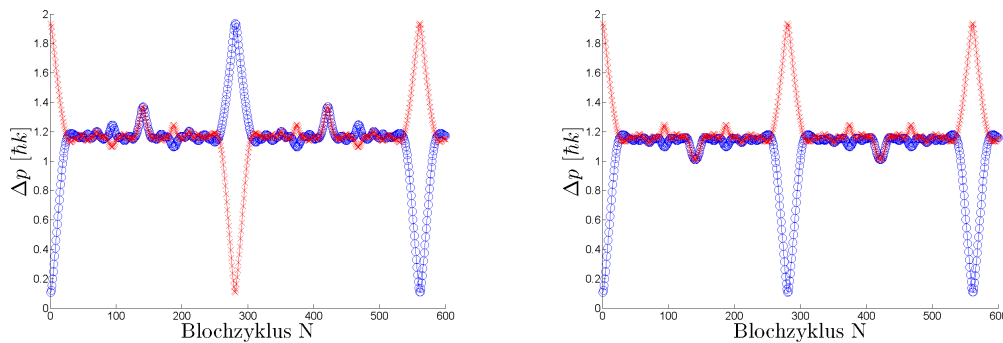


Abbildung 5.18: Simulation der Revival im wechselwirkungsfreien Fall, wobei die leeren Kreise die Impulsbreite bei $\phi = 0$, die Kreuze die Impulsbreite bei $\phi = \pi$ darstellen. Als vertikale Fallenfrequenz wurden 40.8 Hz verwendet. *links*: Vertikales Fallenzentrum liegt genau auf einem Gitterplatz. *rechts*: Vertikales Fallenzentrum liegt genau zwischen zwei Gitterplätzen.

Somit kann bei hinreichend guter Stabilisierung der vertikalen Falle bzw. des Gitters die Phase der BO während des Revivals zur Messung der relativen Positionen verwendet werden. Außerdem liefert die Revivalzeit eine unabhängige Messung der vertikalen Fallenfrequenz.

5 Bloch-Oszillationen

Die Amplitude der Revivals nimmt durch die zusätzlichen Dephasingmechanismen wie in Kapitel 5.4.1 beschrieben laufend ab, derzeit werden sich auch die Schwankung bzw. die Drift der relativen Positionen von Gitter und vertikaler Falle als zusätzliches Dephasing bemerkbar machen. Trotzdem können wir zur Zeit noch bis zu drei weitere Dephasing- und Revivalzyklen beobachten, das entspricht einem Revival nach mehr als 600 ms.

KAPITEL 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde einerseits der Aufbau eines Lasersystems zur Realisierung eines Atominterferometers beschrieben, andererseits wurden die durchgeführten Experimente zu den Bloch-Oszillationen und der Vergleich mit numerischen Simulationen behandelt. In beiden Fällen ist die Kontrolle sowie die Messung des Einflusses der Wechselwirkung entscheidend.

Beim Atominterferometer, das zur Bestimmung der Feinstrukturkonstante α konzipiert wurde, vermindert eine vorhandene Wechselwirkung sowohl die Präzision als auch die Genauigkeit einer Messung. Nach Fertigstellung des optischen Aufbaues kann dieser Einfluss gezielt untersucht und mit den durchgeführten Abschätzungen in dieser Arbeit verglichen werden.

Die durch Wechselwirkung verursachte Dephasierung von Bloch-Oszillationen im Quasi-1D-Gitter wurde quantitativ durch Messung der zeitlichen Zunahme der Impulsverteilungsbreite Δp ermittelt. Ein Vergleich mit theoretischen Vorhersagen und den in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen zeigt eine hervorragende Übereinstimmung. Dabei konnte sowohl der lineare Anstieg der Breite mit der Zeit sowie der lineare Anstieg der Breite mit der effektiven Wechselwirkung, die wiederum proportional mit der Wurzel aus der Streulänge skaliert, experimentell bestätigt werden.

Im nicht-wechselwirkenden Regime konnte die Anzahl nachweisbarer Oszillationen auf über 30000 gesteigert werden, dies würde einer Kohärenzzeit von über 17 s entsprechen. Dadurch konnte das Ramsauer-Townsend-Minimum (Nulldurchgang der Streulänge) mit einer Genauigkeit von 10^{-5} und die Bloch-Periode mit $2 \cdot 10^{-7}$ bestimmt werden. Weiters konnte eine Substruktur der Impulsverteilung im volldephasierten Regime ausgemacht werden, die ebenfalls in entsprechenden Simulationen auftritt. Eine detailliertere Untersuchung dieser Strukturen ist einer der nächsten Schritte, die im Rahmen dieses Experimentes durchgeführt werden.

Durch die Möglichkeit des Abschaltens der Wechselwirkung konnte das theoretisch vorhergesagte Phänomen des Zusammenbruchs und anschließenden Wiederauflebens der BO im Falle eines zusätzlichen harmonischen Potentials beobachtet werden. Die durchgeführten Simulationen zeigten wiederum eine gute Übereinstimmung und trugen wesentlich zum Verständnis der experimentellen Ergebnisse bei. Detailliertere Messungen für diesen Fall sowie die Untersuchung von Dipol-Oszillationen und deren Dämpfung im Gitter [Pon06] sind ebenfalls geplant.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Nach Abschluss dieser Messungen wird wieder das Verhalten des BECs im dreidimensionalen Gitter im Vordergrund stehen. Neben der Untersuchung der BO für diesen Fall eines Real-1D-Gitters hat der Abschluss der Messungen zur bereits begonnenen Charakterisierung des Mott-Isolator-Überganges in Abhängigkeit von der Wechselwirkung bzw. die Induzierung des Überganges allein durch die Wechselwirkung [Kop07] Priorität. Durch die Möglichkeit, im Mott-Isolator-Zustand einen Gitterplatz mit genau zwei oder drei Atomen zu füllen, ist eine genaue Untersuchung der Zwei-Körper- und Drei-Körper-Stoßprozesse möglich.

Mit der kontrollierten Erzeugung von Feshbach-Molekülen im Gitter haben wir durch die Vermeidung von Stoßprozessen eine stabile Ausgangsbasis zur weiteren Untersuchung und Manipulation dieser Moleküle. Die Suche nach Dunkelresonanzen und der Transfer der Moleküle in tiefer gebundene Zustände ist bereits in Vorbereitung. Am mittelfristigen Ziel, der Erzeugung eines molekularen BECs im absoluten Grundzustand, wird bereits intensiv gearbeitet.

ANHANG A

Veröffentlichung im Rahmen dieser Diplomarbeit**Control of Interaction-Induced Dephasing of Bloch Oscillations**

M. Gustavsson, E. Haller, M. J. Mark, J. G. Danzl, G. Rojas-Kopeinig, H.-C. Nägerl

eingereicht für Phys. Rev. Lett. (2007)¹

¹In der eingereichten Veröffentlichung hat sich ein Druckfehler für den angegebenen Wert der gemessenen lokalen Gravitationsbeschleunigung eingeschlichen. Der richtige Wert beträgt $g = 9.803820(9) \text{ m/s}^2$, konsistent mit dem Wert in dieser Diplomarbeit.

Control of Interaction-Induced Dephasing of Bloch Oscillations

M. Gustavsson, E. Haller, M. J. Mark, J. G. Danzl, G. Rojas-Kopeinig, H.-C. Nägerl

¹*Institut für Experimentalphysik und Forschungszentrum für Quantenphysik, Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck, Austria*

(Dated: October 26, 2007)

We report on the control of interaction-induced dephasing of Bloch oscillations for an atomic Bose-Einstein condensate in an optical lattice under the influence of gravity. When tuning the strength of the interaction towards zero by means of a Feshbach resonance, the dephasing time is increased from a few to more than twenty thousand Bloch oscillation periods. We quantify the dephasing in terms of the width of the quasi-momentum distribution and measure its dependence on time for different values of the scattering length. Minimizing the dephasing allows us to realize a BEC-based atom interferometer in the non-interacting limit. We use it for a precise determination of a zero-crossing for the atomic scattering length and to observe collapse and revivals of Bloch oscillations when the atomic sample is subject to a spatial force gradient.

PACS numbers: 03.75.Dg, 39.20.+q, 03.75.Kk, 03.75.Pp

Ultracold atomic systems have initiated a revolution in the field of precision measurements. Laser cooled thermal samples are used for ultra-high resolution laser spectroscopy [1], they are at the heart of modern atomic fountain clocks [2, 3], and they allow the realization of matter-wave interferometers for high-precision inertial sensing [4] and high-precision determination of fundamental constants [5]. Atomic Bose-Einstein condensates (BEC), the matter-wave analoga to the laser, combine high brightness with narrow spatial and momentum spread. In general, the resolution is limited only by the quantum mechanical uncertainty principle, and BECs could thus serve as ideal sources for precision measurements and in particular for matter wave interferometers [6]. Atom-atom interactions, however, have to be taken into account, as they lead to collisional dephasing and give rise to density dependent mean-field shifts in the interferometric signal. It is thus advisable to either operate a BEC-based atom interferometer in the dilute density limit, possibly sacrificing a high signal-to-noise ratio, or to find ways of reducing or even nulling the strength of the interaction altogether. Precisely the latter is feasible in the vicinity of magnetically induced Feshbach resonances where the atomic *s*-wave scattering length and hence the strength of the atom-atom contact interaction go through a zero crossing [7]. It is thus possible to experimentally investigate the reduction and even disappearance of interaction-induced effects on the interferometric signal as the scattering length is tuned towards zero by means of an externally controlled magnetic field.

A paradigm atom interferometric effect is the well-known phenomenon of Bloch oscillations [8]. Bloch oscillations for the mean quasi-momentum are the result of single atom interference as the atomic wavepacket, subject to a constant force, is Bragg reflected in the presence of a periodic optical lattice potential. They have been observed for ultracold thermal samples [5, 8, 9, 10], for atoms in interacting BECs [11, 12], and for ensembles of non-interacting quantum-degenerate fermions [12]. For

the case of the interacting BEC, strong dephasing is found as evidenced by a rapid broadening and apparent smearing out of the momentum distribution in the first Brillouin zone, limiting the observation of Bloch oscillations to a few cycles for typical atomic densities in a BEC. In addition, the measured initial width of the momentum distribution is comparable to the extent of the Brillouin zone, as interaction energy is converted into kinetic energy upon release of the BEC from the lattice potential, thus greatly reducing the contrast of the oscillations [12].

In this Letter, we report on the control of interaction induced dephasing of Bloch oscillations for a BEC in a vertically oriented optical lattice under the influence of gravity. Control is obtained by means of a zero crossing for the atomic *s*-wave scattering length *a*. We observe the transition from an interacting BEC to a non-interacting BEC by measuring the rate of dephasing, given by the change of the width of the momentum distribution, as a function of *a*. We identify a clear minimum for the dephasing which we associate with the zero crossing for *a*. At the minimum more than 2×10^4 oscillations can be observed with high contrast, and the zero crossing can be determined with high precision. For our measurements at non-zero scattering length, we greatly reduce broadening of the momentum distribution by rapidly switching the interaction strength to zero upon release from the lattice potential. Our measurements indicate that BECs can indeed be used as a source for precision atom interferometry, as effects of the interaction can be greatly reduced. For a non-interacting BEC, we intentionally induce dephasing by means of a weak optical force gradient and observe collapse and revivals of Bloch oscillations.

The starting point for our experiments is an essentially pure BEC with typically 1×10^5 Cs atoms in the $|F = 3, m_F = 3\rangle$ hyperfine ground state sublevel confined in a crossed-beam dipole trap generated by one vertically (L_1 , with $1/e^2$ -beam diameter 256 μm) and one more tightly focused horizontally (L_2 , with diameter 84 μm) propagating laser beam at a wavelength near

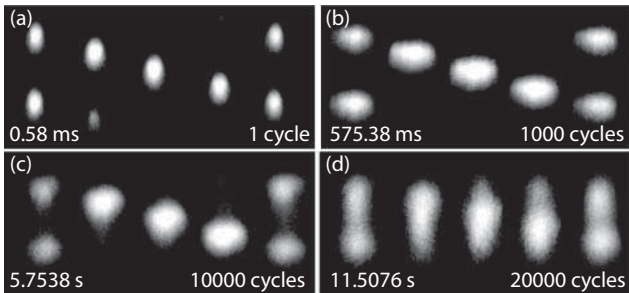


FIG. 1: Long-lived Bloch oscillations for a non-interacting BEC with Cs atoms in the vertical lattice under the influence of gravity. Each picture shows one Bloch cycle in successive time-of-flight absorption images corresponding to the momentum distribution at the time of release from the lattice. Displayed are the first (a), the 1000th (b), the 10000th (c), and the 20000th (d) Bloch cycle for minimal interaction near the zero crossing for the scattering length.

1064 nm. We support the optical trapping by magnetic levitation against gravity [13]. For BEC preparation, we basically follow the procedure described in Ref. [13, 14]. The strength of the interaction can be tuned by means of a broad Feshbach resonance, which causes a zero crossing for the scattering length a near an offset magnetic field value of 17 G with a slope of $61 a_0/\text{G}$ [15]. Here, a_0 denotes Bohr's radius. The lattice potential is generated by a vertically oriented standing laser wave generated by retro-reflection, co-linear with L_1 , but with much larger diameter of $580 \mu\text{m}$. This allows independent control of lattice depth and radial (i.e. horizontal) confinement. The light comes from a home-built single-mode fiber amplifier [16] seeded with highly-stable light at $\lambda = 1064.4946(1) \text{ nm}$. We turn on the optical lattice potential exponentially to a depth of $7.9 E_R$ within 1000 ms, where $E_R = \hbar^2/(2m\lambda^2) = k_B \times 64 \text{ nK}$ is the photon recoil energy and m is the mass of the Cs atom. The slow ramp assures that the BEC is adiabatically loaded into the lowest Bloch band of the lattice. We load between 40 to 65 lattice sites, depending on the initial vertical extent of the BEC. We then reduce the power in L_2 to zero within $300 \mu\text{s}$. Subsequently, the magnetic field gradient needed for levitation is ramped down and a bias magnetic field is tuned to the desired value within $100 \mu\text{s}$. For the present experiments, we adjust a in the range from -2 to $300 a_0$ with magnetic bias fields from 17 to 23 G. We control the average bias field to about 1 mG. The confinement of the BEC in the lattice as given by L_1 gives horizontal trapping frequencies in the range of 5 to 10 Hz. We then let the atoms evolve in the lattice under the influence of the gravitational force for variable hold time T . Finally, we switch off the horizontal confinement and ramp the lattice depth adiabatically to zero within $300 \mu\text{s}$ to measure the momentum distribution by the standard time-of-flight technique, taking an absorp-

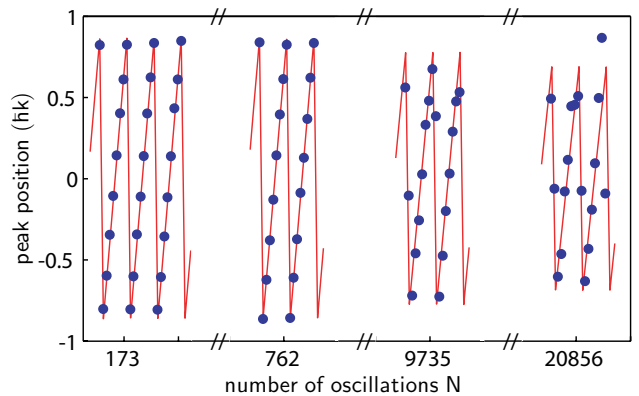


FIG. 2: (color online). Position of the strongest peak in the momentum distribution as a function of the number N of Bloch oscillations (dots). More than 20000 cycles can be followed with high contrast. A fit to the data (solid curve) yields a Bloch period of $0.5753807(5) \text{ ms}$.

tion picture on a CCD camera. For some of the data we turn on the magnetic levitation field to allow for longer expansion times up to 100 ms. To minimize broadening of the distribution as a result of interaction we switch the scattering length to zero during the release and the initial time-of-flight.

We observe persistent Bloch oscillations when minimizing the effect of interactions at a magnetic field value of 17.12 G (see below). Fig. 1 (a)-(d) show the evolution of the momentum distribution during the first, the 1000th, the 10000th, and the 20000th Bloch cycle. Initially, the momentum distribution exhibits narrow peaks. Their full width Δp [17] is as narrow as about $0.15 \hbar k$, where $k = 2\pi/\lambda$. Very little broadening along the vertical direction is seen after the first 1000 cycles. Initial excitation of horizontal motion as a result of ramping the power in L_2 and switching the scattering length leads to some horizontal spreading. After 20000 cycles the distribution has started to spread out noticeably along the vertical direction.

Fig. 2 highlights the high number of Bloch oscillations, which we can observe for the case of minimal interaction strength. It shows how the strongest peak of the momentum distribution cycles through the first Brillouin zone with the typical sawtooth behavior [8]. More than 20000 cycles can easily be followed. From a fit to the data we determine the Bloch period to $0.5753807(5) \text{ ms}$. Assuming that no additional forces act on the sample, the local gravitational constant is $g = 9.804450(9) \text{ m/s}^2$.

In order to quantify the dephasing of Bloch oscillations we determine for each Bloch period the width Δp of the momentum distribution at the instant in time when the peak of the distribution is centered at zero momentum, i.e. for the central picture of each series shown in Fig. 1. Fig. 3 (a) displays Δp up to the 300th Bloch cycle for different interaction strengths ranging from 0 to $300 a_0$. For

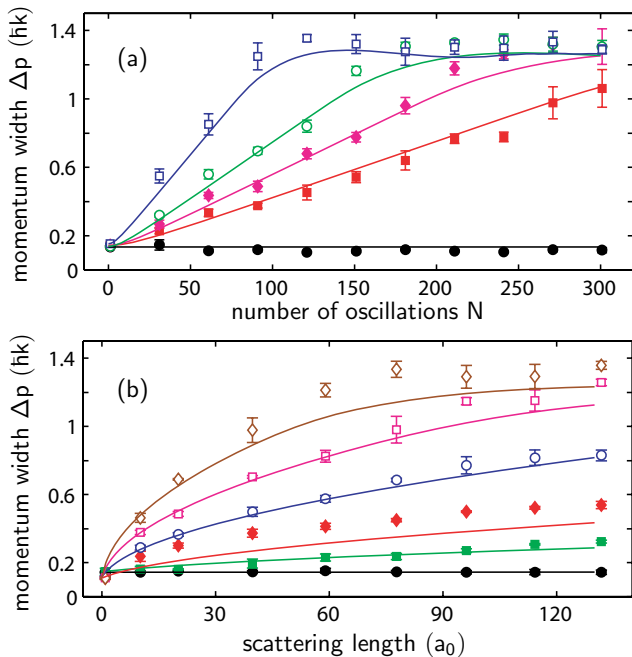


FIG. 3: (color online). Width Δp of the momentum distribution for different interaction strengths. (a) Evolution of Δp as a function of the number N of Bloch cycles for different values of the scattering length ($a = 0, 25, 50, 100,$ and $300 a_0$ from bottom (full circles) to top (full diamonds)). The solid curves are derived from a numerical model calculation, see text. (b) Width Δp for a fixed number of cycles $N = 1$ (full circles), 25 (full squares), 50 (full diamonds), 100 (open circles), 150 (open squares), and 200 (open diamonds) as a function of scattering length. The solid line represents the model calculation. All error bars correspond to \pm one standard deviation resulting from 7 measurements. The data and the simulations correspond to the following parameters: lattice depth: $7.9 E_R$, scattering length during lattice loading: $210 a_0$, trapping frequencies in L_1 and L_2 : 10 and 8 Hz, atom number in the BEC: 5×10^4 .

minimal interaction strength ($a \approx 0 a_0$), we see no broadening of the distribution. Broadening can clearly be seen for $a = 25 a_0$, and the rate of broadening then increases with increasing interaction strength. For $a \geq 50 a_0$ the width Δp saturates within the chosen observation time to a value of about $1.3 \hbar k$ as the momentum distribution completely fills the first Brillouin zone [18]. To a good approximation, we find that Δp initially increases linearly with time. In Fig. 3 (b) we plot Δp as a function of interaction strength for various fixed numbers of Bloch cycles. Δp appears to scale with the square root of the interaction strength. Both observations agree well with a simple model for the dephasing of Bloch oscillations, which predicts $\Delta p \propto \sqrt{a} \times T$ [19] for sufficiently short times T . In order to verify this model, we have performed numerical calculations solving the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation in the presence of an optical lattice under the influence of gravity for the typical parameters of our ex-

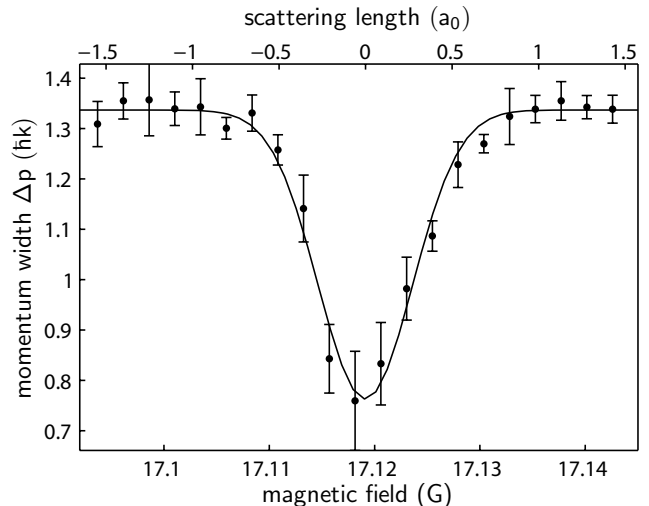


FIG. 4: Broadening of the momentum distribution as a result of 6951 Bloch oscillations near the zero crossing for the scattering length. The width Δp is plotted as a function of magnetic field (dots). The solid line is a Gaussian fit with a rms-width of 4.5 mG. The fit is centered at $17.119(2)$ G. The zero for the scattering length scale on top was chosen to agree with this value.

periment according to the method detailed in Ref. [20]. Via Fourier transform of the spatial wave function we determine the momentum distribution and its width. As shown in Fig. 3 (solid lines) we find very good agreement with our measurements with no adjustable parameters when we add a constant offset of $0.1 \hbar k$ to all the numerical curves. This offset takes into account residual interactions during release from the lattice as a result of the finite magnetic switching speed, which leads to some artificial broadening of the distribution. We attribute the systematic discrepancy for the $N = 50$ data in Fig. 3 (b) to the horizontal motion which leads to modulations in the density that adds a modulation onto Δp also seen in Fig. 3 (a).

To find the value for the magnetic field that gives minimal broadening we measure Δp after 6951 cycles in the vicinity of the crossing. Fig. 4 plots Δp as a function of magnetic field. It shows a clear minimum, which we expect to correspond to the zero crossing for the scattering length. From a Gaussian fit we determine the center position of the minimum to be at $17.119(2)$ G. The one-sigma error takes into account our statistical error in magnetic field calibration. To our knowledge, this is by far the most precise determination of a Ramsauer-Townsend minimum [21] to date in ultracold atom scattering. We believe that our measurements are limited by the ambient magnetic field noise, leading to a finite width for the distribution of the scattering length. In fact, a reduction of the atomic density gives longer decay times for the Bloch oscillations. Note that in the scattering length regime considered here the effect of the

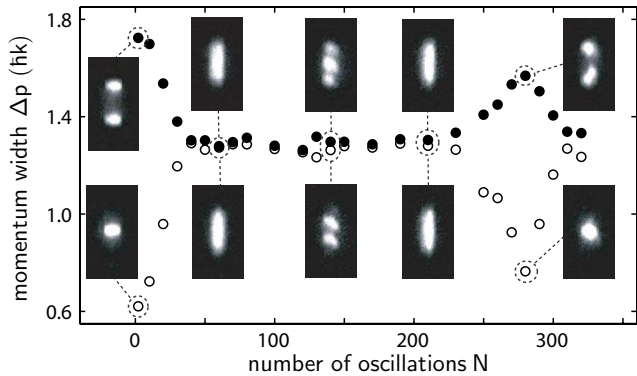


FIG. 5: Collapse and revival of Bloch oscillations for the case of a non-interacting BEC with a vertical force gradient. For two cycle phases separated by π , the width Δp is plotted as a function of the number N of Bloch cycles. For selected cycles ($N = 1, 70, 140, 210$, and 280) two absorption images corresponding to the two cycle phases are shown.

(magnetic) dipole-dipole interaction [23] should start to play a role.

Our capability to observe Bloch oscillations on extended time scales without interaction-induced dephasing allows us to study the effect of deliberately imposed dephasing. For this we apply a linear force gradient ∇F corresponding to harmonic trapping at $\nu = 40(1)$ Hz along the vertical direction by turning on L_2 during the hold time. Fig. 5 shows the widths Δp for two cycle phases separated by π initially corresponding to the single resp. double-peaked distribution as a function of the number N of Bloch cycles. Both widths rapidly increase resp. decrease to the same value of $1.3 \hbar k$ within about $N = 30$ oscillations. Here the ensemble is dephased. It then remains dephased for about 200 cycles. Partial rephasing at intermediate times not reflected in the widths can be seen from the absorption images. Revival of the oscillations [24] happens around $N = 280$ when the values for both widths separate again [22]. This number agrees well with the expected value of $N_{\text{rev}} = 292(15)$ given by $N_{\text{rev}} = F_{\text{grav}}/(\nabla F d) = mg/(m\omega^2 d)$, where F_{grav} is the gravitational force, $\omega = 2\pi\nu$, and $d = \lambda/2$ is the lattice spacing. Subsequently, the widths collapse again to the common value. In further measurements we see up to four collapses and revivals.

In summary, we have demonstrated the control of interaction-induced dephasing near a zero-crossing for the scattering length. On the crossing, we have realized a non-interacting BEC, which allows us to observe more than 20000 Bloch cycles, indicating a matter wave coherence time of more than 10 s. The broadening of the momentum distribution agrees well with results from theoretical models. We believe that the number of observable Bloch cycles is limited by residual interactions as a result of magnetic field noise. Our results open up exciting new avenues for precision measurements with quan-

tum degenerate gases. For example, it is now possible to perform sensitive measurements of forces on short length scales, such as the Casimir-Polder force near a dielectric surface [25]. Future experimental work can now address the nature of the dephasing [26] by studying structure in the momentum distribution.

A similar experiment on long-lasting Bloch oscillations and control of the interaction strength has recently been performed with a BEC of ^{39}K atoms at LENS, Italy. We thank A. Daley for theoretical support and for help with setting up the numerical calculations and A. Buchleitner and his group for useful discussions. We are grateful to A. Liem and H. Zellmer for valuable assistance in setting up the 1064-nm fiber amplifier system. We acknowledge contributions by P. Unterwaditzer and T. Flir during the early stages of the experiment. We are indebted to R. Grimm for generous support and gratefully acknowledge funding by the Austrian Ministry of Science and Research (BMWF) and the Austrian Science Fund (FWF) in form of a START prize grant.

-
- [1] S. A. Diddams, J. C. Bergquist, S. R. Jefferts, and C. W. Oates, *Science* **306**, 1318 (2004).
 - [2] S. Bize *et al.*, *J. Phys. B* **38**, S449 (2005).
 - [3] M. M. Boyd *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 083002 (2007).
 - [4] A. Peters, K.Y. Chung, and S. Chu, *Nature* **400**, 849 (1999).
 - [5] P. Cladé *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 033001 (2006).
 - [6] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 140401 (2002).
 - [7] For a review, see T. Köhler, K. Góral, and P.S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311 (2006).
 - [8] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
 - [9] R. Battesti *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 253001 (2004).
 - [10] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 060402 (2006).
 - [11] O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140402 (2001).
 - [12] G. Roati *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230402 (2004).
 - [13] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Science* **299**, 232 (2003).
 - [14] T. Kraemer *et al.*, *Appl. Phys. B* **79**, 1013 (2004).
 - [15] P. Julienne (private communication).
 - [16] A. Liem, J. Limpert, H. Zellmer, and A. Tünnermann, *Opt. Lett.* **28** 1537 (2003).
 - [17] We define the full width Δp to be the root-mean-square (rms) diameter of the distribution.
 - [18] The momentum distribution of a fully dephased interacting ensemble carries high-contrast substructure which will be discussed in a forthcoming publication.
 - [19] D. Witthaut, M. Werder, S. Mossmann, and H. J. Korsch, *Phys. Rev. E* **71**, 036625 (2005). Note that for the quasi-one-dimensional case the interaction constant in Eq. (33) is proportional to \sqrt{a} , see [20].
 - [20] A. Smerzi and A. Trombettoni, *Phys. Rev. A* **68**, 023613 (2003).
 - [21] C. Ramsauer, *Ann. Phys. (Leipzig)* **64**, 513 (1921), J.S.

- Townsend and V.A. Bailey, *Philos. Mag.* **43**, 593 (1922).
- [22] Note that the revived Bloch cycles are subject to a phase shift, which depends on the vertical location of the harmonic trap minimum with respect to the lattice minima.
- [23] S. Giovanazzi, A. Görlitz, and T. Pfau, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 130401 (2002).
- [24] A. V. Ponomarev and A. R. Kolovsky, *Laser Physics* **16**, 367 (2006).
- [25] I. Carusotto, L. Pitaevskii, S. Stringari, G. Modugno, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 093202 (2005).
- [26] A. Buchleitner and A. R. Kolovsky, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 253002 (2003).

ANHANG B

Matlab-Code Simulation der NPSE

```

% numerical propagation of the NPSE with a split-step Fourier method
clear
tic
% ----- Constants -----
c = 299792458; % Speed of light [m/s]
kB = 1.3806503e-23; % Boltzmann constant [J/K]
hbar = 1.05457148e-34; % Plank constant [Js]
muB = 9.27400949e-28; % Bohr magneton [J/G]
g = 9.80553; % Acceleration of gravity [m/s^2]
u = 1.6605e-27; % Atomic mass unit [kg]
a0 = 0.5291772083e-10; % Bohr's radius in [m]
m = 2.20694650e-25; % Mass of 133Cs [kg]
lambda = 1064.49463e-9; % Lattice wavelength [m]
kr = 2*pi/lambda; % Lattice wavevektor [1/m]
G = 2*kr; % Brillouin zone width [1/m]
Er = hbar^2*kr^2/2/m; % Recoil energy [J]
d = lambda/2; % Lattice site distance [m]
% ----- Physical system start parameters -----
N = 2^13; % Number of discrete points of Psi(x) / Psi(k)
Bzones=16; % Number of Brillouinzones
s = 10; % Lattice Depth
a = 50*a0; % Scattering length
Fext = m*g*0.99982; % Gravitation force
omega_long = 2*pi*30; % Longitudinal trap frequency
omega_norm = 20*2*pi;
omega_perp = sqrt(omega_norm*sqrt(omega_long^2+omega_norm^2));
Natoms = 50000; % Number of atoms
TBloch=2*pi*hbar/Fext/d; % Bloch period
NumberBlochPeriods=1; % Number of Bloch oszillations to simulate
Steps = 20; % Saved steps per BO
tSteps = 100; % Diskrete Steps between saved steps
dt = TBloch/Steps/tSteps; % Single time step dt
saves = 1+NumberBlochPeriods*Steps; % # of saved wave functions
% ----- Needed calculations to start -----
dk = Bzones*G/N; % Momentum sampling length
dx = 2*pi/(dk*N) % Real space sampling length
k = [-(N-1)/2*dk:dk:(N-1)/2*dk]+1/2*dk; % Momentum vector
x = [-(N-1)/2*dx:dx:(N-1)/2*dx]+dx/2; % Real space vector
q = [-(N-1)/N*kr:dk:(N-1)/N*kr]+1/2*dk; % Quasi momentum vector
Ek = hbar^2*k.^2/(2*m)/Er; % Dispersion relation
g3d = 4*pi*hbar^2*a/m; % Nonlinear interaction term

```

B Matlab-Code Simulation der NPSE

```

VFx = 0.5*m*omega_long^2*x.^2;           % Potential of the harmonic trap
VLx = s*Er*sin(x*kr).^2;                % Potential due to Lattice
PSI_x = zeros(saves,N);                 % wave functions Psi(t,x)
PSI_k = zeros(saves,N);                 % wave functions Psi(t,k)
PSI_q = zeros(saves,N/Bzones);          % wave functions Psi(t,q)
mean_q = zeros(1,saves);                 % mean momentum of Psi(t,q)
width_q = zeros(1,saves);                % momentum width of Psi(t,q)
sigma_long = sqrt(hbar/m/omega_long);    % Longitudinal oscillator length
sigma_perp = sqrt(hbar/m/omega_perp);    % Radial oscillator length
omegam=(omega_long*omega_perp*omega_perp)^(1/3); % Averaged trap frequ.
sigmam=sqrt(hbar/m/omegam);              % Averaged osc. length
mu=hbar*omegam/2*((15*Natoms*a/sigmam)^(2/5)); % Chem. Pot. for TF
radiustf_long=sqrt(2*mu/m/omega_long/omega_long); % Longitudinal TF-rad.
psi_x = zeros(1,N);                      % Start Wave function
if (a == 0)
psi_x = exp(-(x.^2)/(sigma_long)^2);
    psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2)*dx); % Normalize
else
    for indexTF=1:N
        if (x(indexTF)<-radiustf_long) || (x(indexTF)>radiustf_long)
            psi_x(indexTF)=0;
        else
            psi_x(indexTF)=sqrt(radiustf_long^2-(x(indexTF))^2);
        end;
    end;
    psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2)*dx); % Normalize
end;
% ----- Propagate imaginary in time for the ground state -----
psi_x_2=abs(psi_x).^2;                    % Density psi_x
delta=10;
counter=0;
dtgs = 1e-5; % dt for finding ground state
while (delta > 1)
    counter = counter+1;
    n = Natoms*psi_x_2;                    % Real Density
    V2x = g3d/2/pi/(sigma_perp^2)*n./sqrt(1+2*a.*n);
    V2x = V2x+0.5*hbar*omega_perp*(1./sqrt(1+2*a.*n)+sqrt(1+2*a.*n));
    psi_k = fftshift(fft(psi_x));          % FFT to k-space
    psi_k = exp(-1*Ek*Er/hbar*dtgs/2).*psi_k; % dtgs/2 in k-space
    psi_x = (ifft(ifftshift(psi_k)));      % iFFT to x-space
    psi_x = exp(-1*(VFx+VLx+V2x)/hbar*dtgs).*psi_x; % dtgs in x-space
    psi_k = fftshift(fft(psi_x));          % FFT to k-space
    psi_k = exp(-1*Ek*Er/hbar*dtgs/2).*psi_k; % dtgs/2 in k-space
    psi_x = (ifft(ifftshift(psi_k)));      % iFFT to x-space
    psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2)*dx); % Normalize psi_x
    psi_x_3=abs(psi_x).^2;                  % Density psi_x
    if (counter/10 == round(counter/10))
        plot(x,psi_x_3);
        drawnow;
    end;
    delta = sum(abs(psi_x_3-psi_x_2));      % Has the Wave function changed?
end;

```

```

    psi_x_2=psi_x_3;
end;
% ----- Save starting wave function -----
psi_k = fftshift(fft(psi_x));          % FFT to k-space
psi_k = psi_k/sqrt(sum(abs(psi_k).^2)); % Normalize psi_k
psi_k_2 = abs(psi_k).^2;              % Density psi_k
psi_q = zeros(1,N/Bzones);
for indexpsiq = 1:Bzones
    buffer = psi_k((indexpsiq-1)*N/Bzones+1:indexpsiq*N/Bzones);
    psi_q = psi_q+fftshift(buffer);
end;
psi_q = psi_q/sqrt(sum(abs(psi_q).^2)); % Normalize psi_q
psi_q_2 = abs(psi_q).^2;              % Density psi_q
Ewx = sum(psi_q_2.*q);
Erw2x = sum(psi_q_2.*((q-Ewx).^2));
mean_q(1)=Ewx/kr;
width_q(1)=2*sqrt(Erw2x)/kr;
PSI_x(1,:) = psi_x_2;
PSI_k(1,:) = psi_k_2;
PSI_q(1,:) = psi_q_2;
% ----- Change physikal parameters for bloch oscillations -----
omega_long = 2*pi*0;                  % Longitudinal trap frequency
omega_norm = 20*2*pi;
omega_perp = sqrt(omega_norm*sqrt(omega_long^2+omega_norm^2));
sigma_perp = sqrt(hbar/m/omega_perp); % Radial oscillator length
a = 0*a0;                             % scattering length
g3d = 4*pi*hbar^2*a/m;                % Nonlinear interaction term
VFx = x*Fext+0.5*m*omega_long^2*x.^2; % Potential due to g and trap
% ----- Propagation -----
for i2 = 2:saves
    %----- propagate step -----
    for i3 = 1:tSteps
        n = Natoms*psi_x_2;          % Real Density
        V2x = g3d/2/pi/(sigma_perp^2)*n./sqrt(1+2*a.*n);
        V2x = V2x+0.5*hbar*omega_perp*(1./sqrt(1+2*a.*n)+sqrt(1+2*a.*n));
        psi_k = fftshift(fft(psi_x)); % FFT to k-space
        psi_k = exp(-i*Ek*Er/hbar*dt/2).*psi_k; % dt/2 in k-space
        psi_x = (ifft(ifftshift(psi_k))); % iFFT to x-space
        psi_x = exp(-i*(VFx+VLx+V2x)/hbar*dt).*psi_x; % dt in x-space
        psi_k = fftshift(fft(psi_x)); % FFT to k-space
        psi_k = exp(-i*Ek*Er/hbar*dt/2).*psi_k; % dt/2 in k-space
        psi_x = (ifft(ifftshift(psi_k))); % iFFT to x-space
        psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2)*dx); % Normalize psi_x
        psi_x_2=abs(psi_x).^2;        % Density psi_x
    end;
    %----- save step -----
    psi_k = fftshift(fft(psi_x));      % FFT to k-space
    psi_k = psi_k/sqrt(sum(abs(psi_k).^2)); % Normalize psi_k
    psi_k_2 = abs(psi_k).^2;          % Density psi_k
    psi_q = zeros(1,N/Bzones);
    for indexpsiq = 1:Bzones

```

B Matlab-Code Simulation der NPSE

```
        buffer = psi_k((indexpsiq-1)*N/Bzones+1:indexpsiq*N/Bzones);
        psi_q = psi_q+fftshift(buffer);
    end;
    psi_q = psi_q/sqrt(sum(abs(psi_q).^2));           % Normalize psi_q
    psi_q_2 = abs(psi_q).^2;                         % Density psi_q
    Ewx = sum(psi_q_2.*q);
    Erw2x = sum(psi_q_2.*((q-Ewx).^2));
    mean_q(i2)=Ewx/kr;
    width_q(i2)=2*sqrt(Erw2x)/kr;
    PSI_x(i2,:) = psi_x_2;
    PSI_k(i2,:) = psi_k_2;
    PSI_q(i2,:) = psi_q_2;
end;
% ----- Plots at the end -----
time=[0:dt*tSteps:(saves-1)*dt*tSteps]*1e3;
figure
mesh(k/kr,time,PSI_k,'MeshStyle','row')
figure
mesh(q/kr,time,PSI_q,'MeshStyle','row')
```

ANHANG C

Matlab-Code Simulation der DNLSE/DNL/DNPSE

```

% Numerical propagation of the 1D DNPSE with ode45
clear
filename = 'xxx.mat';
% ----- Constants -----
c = 299792458; % Speed of light [m/s]
kB = 1.3806503e-23; % Boltzmann constant [J/K]
hbar = 1.05457148e-34; % Plank constant [Js]
muB = 9.27400949e-28; % Bohr magneton [J/G]
g = 9.80553; % Acceleration of gravity [m/s^2]
u = 1.6605e-27; % Atomic mass unit [kg]
a0 = 0.5291772083e-10; % Bohr's radius in [m]
m = 2.20694650e-25; % Mass of 133Cs [kg]
lambda = 1064.49463e-9; % Lattice wavelength [m]
kr = 2*pi/lambda; % Lattice wavevektor [1/m]
omega_r = hbar*kr^2/2/m; % Recoil frequency [Hz]
G = 2*kr; % Brillouin zone width [1/m]
Er = hbar^2*kr^2/2/m; % Recoil energy [J]
d = lambda/2; % Lattice site distance [m]
% ----- Physical system start parameters -----
Fext = m*g*0.99982; % Gravitation force
TBloch = 2*pi*hbar/Fext/d % Bloch period
NumberBlochPeriods = 200; % Number of BO to simulate
Steps = 1; % Saved steps per BO
dt = TBloch/Steps; % Single time step dt
saves = 1+NumberBlochPeriods*Steps; % # of saved wave functions
N = 401; % Number of Wells !ODD!
s = 7.9; % Lattice Depth
a = 200*a0; % scattering length
omega_long_1 = 10.5*2*pi; % Longitudinal trap frequency
omega_norm = 7.5*2*pi;
omega_perp = sqrt(omega_norm*sqrt(omega_long_1^2+omega_norm^2));
Natoms = 62000; % Number of atoms
ExpansionTime = 92e-3; % End expansion time
% ----- Needed calculations to start -----
dq = 2*pi/(d*(N-1))
x = [-d*(N-1)/2:d:d*(N-1)/2]; % Real space vector
q = [-dq*(N-1)/2:dq:dq*(N-1)/2]/kr; % Quasi momentum vector
qexp = [-dq*(N-1):dq:dq*(N-1)]/kr; % Doubled Quasi momentum vector
PSI_save = zeros(saves,N); % wave functions Psi(t,x)
PSI_save_q = zeros(saves,N); % wave functions Psi(t,q)
PSI_save_Exp = zeros(saves,N*2-1); % wave functions Psi(t,qexp)

```

C Matlab-Code Simulation der DNLSE/DNL/DNPSE

```

mean_q = zeros(1,saves); % mean momentum of Psi(t,qexp)
sigma_long = sqrt(hbar/m/omega_long_1); % Long. osc. length
sigma_perp = sqrt(hbar/m/omega_perp); % Radial osc. length
omegam=(omega_long_1*omega_perp*omega_perp)^(1/3); % averaged trap frequ.
sigmam=sqrt(hbar/m/omegam); % averaged osc. length
mu=hbar*omegam/2*((15*Natoms*a/sigmam)^(2/5)); % Chem. Pot. for TF
radiustf_long=sqrt(2*mu/m/omega_long_1/omega_long_1); % Longitudinal TFr
omega_latt=2*omega_r*sqrt(s); % Harmonic frequency in one well
sigma_latt=sqrt(hbar/m/omega_latt); % Oscillator length in one well
g3d = 4*pi*hbar^2*a/m; % Nonlinear interaction term
Vext = (0.5*m*omega_long_1^2*x.^2)'; % Potential energie per well
MaxExpqr = radiustf_long/(hbar*kr/m*ExpansionTime); % Expansion faktor
psi_x = zeros(1,N); % Start Wave function
PSI_Exp_Start = zeros(1,N); % Scaled Start Wave function
if (a == 0)
psi_x = exp(-(x.^2)/2/(sigma_long)^2);
psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2));
PSI_Exp_Start = exp(-(q.^2)/2/(sigma_long/MaxExpqr)^2);
PSI_Exp_Start = abs(PSI_Exp_Start/sqrt(sum(abs(PSI_Exp_Start).^2))).^2;
else
for indexTF=1:N
if (x(indexTF)<-radiustf_long) || (x(indexTF)>radiustf_long)
psi_x(indexTF) = 0;
else
psi_x(indexTF) = sqrt(radiustf_long^2-(x(indexTF))^2);
end;
if (q(indexTF)<-(MaxExpqr)) || (q(indexTF)>(MaxExpqr))
PSI_Exp_Start(indexTF) = 0;
else
PSI_Exp_Start(indexTF) = sqrt((MaxExpqr)^2-q(indexTF)^2);
end;
end;
psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2)); % Normalize
PSI_Exp_Start = abs(PSI_Exp_Start/sqrt(sum(abs(PSI_Exp_Start).^2))).^2;
end;
% ----- Calculate Tunnel matrix element -----
nCoeff = 40; % Number of coeffs >0
mCoeff = -nCoeff:1:nCoeff; % List of coeffs
E0 = zeros(1,N); % First bloch band energies
for index_q = 1:N
H = make_HMatrix(q(index_q));
[cn, En] = eig(H);
E0(index_q) = En(1);
end;
K = abs(E0(1)-E0((N-1)/2+1))/4*Er;
%----- options for ode45 solver -----
options=odeset('RelTol',3e-8,'AbsTol',1e-8,'Stats','off','MaxStep',1e-6);
% ----- Propagate imaginary in time for the ground state -----
psi_x_2 = abs(psi_x).^2; % Density psi_x
delta = 10;
counter = 0;

```

```

dtgs = 1e-4;           % dt for finding ground state
while (delta > 1e-6)
    counter = counter+1;
    [TT,PSI_out] = ode45(@DGLFUNC2,[0 dtgs/2 dtgs],psi_x,options);
    psi_x = PSI_out(3,:);
    psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2));
    psi_x_3 = abs(psi_x).^2;
    if (counter/10 == round(counter/10))
        plot(x/d,psi_x_3);
        drawnow;
    end;
    delta = sum(abs(psi_x_3-psi_x_2)); % Has the Wave function changed?
    psi_x_2 = psi_x_3;
end;
%----- Run for different Scattering lengths -----
streulaenge = [0 25 50 100 300];
width_q = zeros(length(streulaenge),1,saves);
for streuen = 1:length(streulaenge)
    psi_x = sqrt(psi_x_3);
    psi_x_2 = psi_x_3;
    psi_q = fftshift(fft(psi_x));
    psi_q = psi_q/sqrt(sum(abs(psi_q).^2));
    psi_q_2 = abs(psi_q).^2;
    psi_exp_2 = conv(PSI_Exp_Start,psi_q_2);
    psi_exp_2 = psi_exp_2/sum(psi_exp_2);
%----- Save the simulation start -----
    PSI_save(1,:) = psi_x_2;
    PSI_save_q(1,:) = psi_q_2;
    PSI_save_Exp(1,:) = psi_exp_2;
    Ewx = sum(psi_exp_2.*qexp);
    Erw2x = sum(psi_exp_2.*((qexp-Ewx).^2));
    mean_q(1) = Ewx;
    width_q(streuen,1) = 2*sqrt(Erw2x);
    test=sort(psi_x_2,'descend');
    latticesites=1;
    while (sum(test(1:latticesites))<0.999)
        latticesites = latticesites+1;
    end
%----- Plot the simulation start -----
    subplot(3,2,2);
    plot(x/d,psi_x_2,x/d,PSI_save(1,:),'r');
    title(['Prop. time = ' num2str(0,4) ' ms / ' ...
    num2str(0,3) ' %']);
    xlabel('lattice site n');
    subplot(3,2,4);
    plot(q,psi_q_2);
    title('momentum in q');
    xlabel('q/kr');
    subplot(3,2,6);
    plot(qexp,psi_exp_2);
    subplot(3,2,[1 3 5]); plot(0,width_q(streuen,1),'o');

```

C Matlab-Code Simulation der DNLSE/DNL/DNPSE

```
xlabel('Propagation time [ms]'); ylabel('moment2_k');
drawnow;
% ----- Change physikal parameters for bloch oscillations -----
omega_long = 0*2*pi; % Longitudinal trap frequency
omega_norm = 8.6*2*pi;
omega_perp = sqrt(omega_norm*sqrt(omega_long^2+omega_norm^2));
sigma_perp = sqrt(hbar/m/omega_perp); % Radial oscillator length
a = streulaenge(streuen)*a0; % scattering length
g3d = 4*pi*hbar^2*a/m; % Nonlinear interaction term
Vext = (x*Fext+0.5*m*omega_long^2*x.^2)';
% ----- Propagation -----
for counter = 2:saves
    [TT,PSI_out] = ode45(@DGLFUNC,[0 dt/2 dt],psi_x,options);
    psi_x = PSI_out(3,:);
    psi_x = psi_x/sqrt(sum(abs(psi_x).^2));
    psi_x_2 = abs(psi_x).^2;
    psi_q = fftshift(fft(psi_x));
    psi_q = psi_q/sqrt(sum(abs(psi_q).^2));
    psi_q_2 = abs(psi_q).^2;
    psi_exp_2 = conv(PSI_Exp_Start,psi_q_2);
    psi_exp_2 = psi_exp_2/sum(psi_exp_2);
    %----- save step -----
    PSI_save(counter,:) = psi_x_2;
    PSI_save_q(counter,:) = psi_q_2;
    PSI_save_Exp(counter,:) = psi_exp_2;
    Ewx = sum(psi_exp_2.*qexp);
    Erw2x = sum(psi_exp_2.*((qexp-Ewx).^2));
    mean_q(counter) = Ewx;
    width_q(streuen,counter) = 2*sqrt(Erw2x);
    %----- plot step -----
    subplot(3,2,2);
    plot(x/d,psi_x_2,x/d,PSI_save(1,:), 'r');
    xlabel('lattice site n');
    subplot(3,2,4);
    plot(q,psi_q_2);
    title('momentum in q');
    xlabel('q/kr');
    subplot(3,2,6);
    plot(qexp,psi_exp_2);
    subplot(3,2,[1 3 5]);
    plot([0:dt:(counter-1)*dt]*1e3,width_q(streuen,1:counter), 'o');
    xlabel('Propagation time [ms]'); ylabel('Momentum width');
    drawnow;
end;
end;
% ----- Plots at the end -----
time = [0:(counter-1)];
% ----- Plot against time -----
streuzuplotten = [0 25 50 100 300];
figure
hold on
```

```

for i3 = 1:length(streuzuplotten)
    plot(time,0.1+width_q(find(streulaenge == streuzuplotten(i3)),:));
end;
hold off
% ----- Plot against scattering length -----
zeituplotten = [1 25 50 100 150 200];
figure
hold on
for i3 = 1:length(zeituplotten)
    plot(streulaenge,0.1+width_q(:,find(time == zeituplotten(i3))));
end;
hold off
save(filename);
%----- Helper functions -----
function DPSI= DGLFUNC(t,PSI);
psi_j=PSI;
n=Natoms*abs(psi_j).^2;
psi_jm1=[0; PSI(1:N-1); ];
psi_jp1=[PSI(2:N); 0;];
DPNSE=g3d*n./(((2*pi)^(3/2))*sigma_latt*sigma_perp^2*sqrt(1+2*a*n/(2*sqrt(2*pi))/sigma_latt));
DNL=sqrt(n)*sqrt(m*omega_perp^2*g3d/(sqrt(2*pi)*pi*sigma_latt));
DNLSE=g3d*n/((2*pi)^(3/2))/sigma_perp^2/sigma_latt;
DPSI=-i/hbar*(Vext+DNL).*psi_j+i/hbar*K*(psi_jm1+psi_jp1);
end
function DPSI2= DGLFUNC2(t,PSI);
psi_j=PSI;
n=Natoms*abs(psi_j).^2;
psi_jm1=[0; PSI(1:N-1); ];
psi_jp1=[PSI(2:N); 0;];
DPNSE=g3d*n./(((2*pi)^(3/2))*sigma_latt*sigma_perp^2*sqrt(1+2*a*n/(2*sqrt(2*pi))/sigma_latt));
DNL=sqrt(n)*sqrt(m*omega_perp^2*g3d/(sqrt(2*pi)*pi*sigma_latt));
DNLSE=g3d*n/((2*pi)^(3/2))/sigma_perp^2/sigma_latt;
DPSI2=-1/hbar*(Vext+DNL).*psi_j+K/hbar*(psi_jm1+psi_jp1);
end
function H = make_HMatrix(q)
    h1 = (2*mCoeff+q).^2+ s/2;
    hDiag = diag(h1,0);
    h2 = ones(2*nCoeff,1)*(+s)/4;
    hOffs = diag(h2,1)+diag(h2,-1);
    H = hDiag + hOffs;
end

```


Literatur

- [And95] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995).
- [And97] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. D. and D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Observation of Interference Between Two Bose-Einstein Condensates*, Science **275**, 637 (1997).
- [And98] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*, Science **282**, 1686 (1998).
- [Ank05] T. Anker, *Ultracold quantum gases in one-dimensional optical lattice potentials – nonlinear matter wave dynamics*, Ph.D. thesis, University of Heidelberg (2005).
- [Bar04] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Crossover from a molecular Bose-Einstein condensate to a degenerate Fermi gas*, Phys. Rev. Lett. **92**, 120401 (2004).
- [BD96] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).
- [Bla01] E. D. Black, *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*, American Journal of Physics **69**, 79 (2001).
- [Blo29] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Z. Physik **52**, 555 (1929).
- [Bog47] N. Bogolubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. **11**, 23 (1947).
- [Bon02] K. Bongs and K. Sengstock, *Introduction to Bose-Einstein Condensation*, in: M. Weidemüller and C. Zimmermann (Eds.), *Interactions in Ultracold Gases*, Wiley-VCH, Weinheim, 2002.
- [Bur01] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. I. M. L. Chiofalo, and M. P. Tosi, *Superfluid and Dissipative Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Periodic Optical Potential*, Phys. Rev. Lett. **86**, 4447 (2001).
- [Bur02] K. Burnett, P. S. Julienne, P. D. Lett, E. Tiesinga, and C. J. Williams, *Quantum encounters of the cold kind*, Nature **416**, 225 (2002).
- [Car91] O. Carnal and J. Mlynek, *Young's double-slit experiment with atoms: A simple atom interferometer*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2689 (1991).

Literatur

- [Cat01] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio, *Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates*, *Science* **293**, 843 (2001).
- [Chi01] C. Chin, *Cooling, Collisions and Coherence of Cold Cesium Atoms in a Trap*, Ph.D. thesis, Stanford University (2001).
- [Cla06] P. Cladé, E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben, *Determination of the Fine Structure Constant Based on Bloch Oscillations of Ultracold Atoms in a Vertical Optical Lattice*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 033001 (2006).
- [Dal99a] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [Dal99b] J. Dalibard, *Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases*, in: M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (Eds.), *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, 321, IOS Press, 1999.
- [Dan07] J. G. Danzl, *Towards Optical Spectroscopy of Ultracold Cesium Molecules*, Master's thesis, University of Innsbruck (2007), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Dav95] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [Den02] J. H. Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, *Journal of Physics B* **35**, 3095 (2002).
- [Efi71] V. Efimov, *Weakly-bound states of three resonantly interacting particles*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971).
- [Fer06] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, and G. M. Tino, *Long-Lived Bloch Oscillations with Bosonic Sr Atoms and Application to Gravity Measurement at the Micrometer Scale*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 060402 (2006).
- [Fes62] H. Feshbach, *A Unified Theory of Nuclear Reactions. II*, *Ann. Phys.* **19**, 287 (1962).
- [Fle76] J. A. Fleck, J. R. Morris, and M. D. Feit, *Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere*, *Appl. Phys. A* **10**, 129 (1976).
- [Fli06] A. Flir, *Implementierung und Untersuchung von Raman-Seitenbandkühlung zur Erzeugung eines ultrakalten Cäsiumgases*, Master's thesis, University of Innsbruck (2006), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Gab06] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, and B. Odom, *New Determination of the Fine Structure Constant from the Electron g Value and QED*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030802 (2006).

- [Ger06] V. Gerginov, K. Calkins, C. E. Tanner, J. J. McFerran, S. Diddams, A. Bartels, and L. Hollberg, *Optical frequency measurements of $6s^2S_{1/2} - 6p^2P_{1/2}$ (D_1) transitions in ^{133}Cs and their impact on the fine-structure constant*, Phys. Rev. A **73**, 032504 (2006).
- [Gou86] P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, *Diffraction of atoms by light: The near-resonant Kapitza-Dirac effect*, Phys. Rev. Lett. **56**, 827 (1986).
- [Gre02] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39 (2002).
- [Gre03] M. Greiner, C. Regal, and D. Jin, *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*, Nature **426**, 537 (2003).
- [Gri00] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000),
- [Gro61] E. P. Gross, *Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems*, Il Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
- [Gup02] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D. E. Pritchard, *Contrast Interferometry using Bose-Einstein Condensates to Measure h/m and α* , Phys. Rev. Lett. **89**, 140401 (2002).
- [Gup03] S. Gupta, *Experiments with Degenerate Bose and Fermi Gases*, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology (2003).
- [Gus07] M. Gustavsson, E. Haller, M. J. Mark, J. G. Danzl, G. Rojas-Kopeinig, and H.-C. Naegerl, *Control of Interaction-Induced Dephasing of Bloch Oscillations*, <http://arxiv.org/abs/0710.5083> (2007).
- [Her03] J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nagerl, and R. Grimm, *Preparation of a Pure Molecular Quantum Gas*, Science **301**, 1510 (2003).
- [Her05] J. Herbig, *Quantum degenerate Cesium: Atoms and Molecules*, Ph.D. thesis, Innsbruck University (2005), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Jak98] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).
- [Jön61] C. Jönsson, *Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten*, Zeitschrift für Physik A **161**, 454 (1961).
- [Joc03a] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Bose-Einstein condensation of molecules*, Science **302**, 2101 (2003).
- [Joc03b] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, C. Chin, J. H. Denschlag, and R. Grimm, *Pure Gas of Optically Trapped Molecules Created from Fermionic Atoms*, Phys. Rev. Lett. **91**, 240402 (2003).

Literatur

- [Kag97] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Evolution and Global Collapse of Trapped Bose Condensates under Variations of the Scattering Length*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2604 (1997).
- [Kap33] P. L. Kapitza and P. A. M. Dirac, *The reflection of electrons from standing light waves*, Proc. of the Camb. Philos. Soc. **29**, 297 (1933).
- [Kas91] M. Kasevich and S. Chu, *Atomic interferometry using stimulated Raman transitions*, Phys. Rev. Lett. **67**, 181 (1991).
- [Kas95] A. Kastberg, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw, and P. S. Jessen, *Adiabatic Cooling of Cesium to 700 nK in an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1542 (1995).
- [Ker00] A. J. Kerman, V. Vuletić, C. Chin, and S. Chu, *Beyond Optical Molasses: 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density*, Phys. Rev. Lett. **84**, 439 (2000).
- [Ket99] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*, in: M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (Eds.), *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, 67, IOS Press, 1999, arxivcond-mat/9904034.
- [Kol03] A. R. Kolovsky, *New Bloch Period for Interacting Cold Atoms in 1D Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **90**, 213002 (2003).
- [Kol04] A. R. Kolovsky and H. J. Korsch, *Bloch oscillations of cold atoms in optical lattices*, Int. J. Mod. Phys. B **18**, 1235 (2004).
- [Kop07] G. R. Kopeinig, *A Tunable Bose-Einstein Condensate in a Three-dimensional Optical Lattice Potential*, Master's thesis, University of Innsbruck (2007), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Koz99] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Coherent Splitting of Bose-Einstein Condensed Atoms with Optically Induced Bragg Diffraction*, Phys. Rev. Lett. **82**, 871 (1999).
- [Kra06] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. Lange, K. Pilch, A. Jaakola, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms*, Nature **440**, 315 (2006).
- [Mar88] P. J. Mar, B. G. Oldaker, A. H. Miklich, and D. E. Pritchard, *Bragg scattering of atoms from a standing light wave*, Phys. Rev. Lett. **60**, 515 (1988).
- [Mar03] M. Mark, *Bose-Einstein-Kondensation von Cäsium*, Diploma thesis, Universität Innsbruck (2003), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Mar05] M. Mark, T. Kraemer, J. Herbig, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Efficient creation of molecules from a cesium Bose-Einstein condensate*, Europhysics Letters **69**, 706 (2005).

- [Mar07] M. Mark, T. Kraemer, P. Waldburger, J. Herbig, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, '*Stückelberg Interferometry*' with Ultracold Molecules, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 113201 (2007).
- [Mat99] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2498 (1999).
- [Mek07] I. B. Mekhov, C. Maschler, and H. Ritsch, *Light scattering from ultracold atoms in optical lattices as an optical probe of quantum statistics* (2007), download: arXiv:quant-ph/0702193v2.
- [Met99] H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser cooling and trapping*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Moh05] P. J. Mohr and B. N. Taylor, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002*, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1 (2005).
- [Mor06] O. Morsch and M. Oberthaler, *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [Nie99] E. Nielsen and J. H. Macek, *Low-energy recombination of identical bosons by three-body collisions*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1566 (1999).
- [Pet02] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, 2002.
- [Pet04] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, *Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090404 (2004).
- [Pit61] L. P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, *Sov. Phys. JETP* **13**, 451 (1961).
- [Pit03] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, International Series of Monographs on Physics 116, Oxford University Press, 2003.
- [Pon06] A. V. Ponomarev and A. R. Kolovsky, *Dipole and Bloch oscillations of cold atoms in a parabolic lattice*, *Laser Physics* **16**, 367 (2006).
- [Reg03] C. A. Regal, C. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Creation of ultracold molecules from a Fermi gas of atoms*, *Nature* **424**, 47 (2003).
- [Sal00] C. Salomon, Y. Sortais, S. Bize, M. Abgrall, S. Zhang, C. Nicolas, C. Mandache, P. Lemonde, P. Laurent, G. Santarelli, A. Clairon, N. Dimarcq, P. Petit, A. Mann, A. Luiten, and S. Chang, *Cold Atom Clocks*, in: E. Arimondo, P. D. Natale, and M. Inguscio (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference on Atomic Physics (ICAP2000)*, 23, American Institute of Physics, 2000.
- [Sal02] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto, *Effective wave equations for the dynamics of cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates*, *Phys. Rev. A* **65**, 043614 (2002).

Literatur

- [Söd98] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, G. Ferrari, and J. Dalibard, *Giant Spin Relaxation of an Ultracold Cesium Gas*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1869 (1998).
- [Sha97] L. F. Shampine and M. W. Reichelt, *The MATLAB ODE Suite*, SIAM Journal on Scientific Computing **18**, 1 (1997).
- [SK98] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A. P. Chikkatur, S. Inouye, J. Steninger, and W. Ketterle, *Reversible Formation of a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2194 (1998).
- [Sme03] A. Smerzi and A. Trombettoni, *Nonlinear tight-binding approximation for Bose-Einstein condensates in a lattice*, Phys. Rev. A **68**, 023613 (2003).
- [Tie92] E. Tiesinga, A. Moerdijk, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, *Conditions for Bose-Einstein condensation in magnetically trapped atomic cesium*, Phys. Rev. A **46**, R1167 (1992).
- [Tie93] E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, *Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions*, Phys. Rev. A **47**, 4114 (1993).
- [Tor00] Y. Torii, Y. Suzuki, M. Kozuma, T. Sugiura, T. Kuga, L. Deng, and E. W. Hagley, *Mach-Zehnder Bragg interferometer for a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **61**, 041602(R) (2000).
- [Tre07] A. Trenkwalder, *Design of a Resonator Enhanced Optical Dipole Trap for Fermionic Mixtures*, Master's thesis, University of Innsbruck (2007), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Tro01] A. Trombettoni and A. Smerzi, *Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2353 (2001).
- [Unt05] P. Unterwaditzer, *Aufbau eines vollständigen Diodenlasersystems zur Laserkühlung und Detektion von gespeicherten Cs-Atomen*, Master's thesis, University of Innsbruck (2005), download: <http://www.ultracold.at>.
- [VD87] R. S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt, *New high-precision comparison of electron and positron g factors*, Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987).
- [Was93] C. Waschke, H. G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. Köhler, *Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3319 (1993).
- [Web03a] T. Weber, *Bose-Einstein Condensation of Optically Trapped Cesium*, Ph.D. thesis, University of Innsbruck (2003), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Web03b] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Bose-Einstein Condensation of Cesium*, Science **299**, 232 (2003).
- [Wei99] J. Weiner, V. S. Bagnato, S. Zilio, and P. S. Julienne, *Experiments and theory in cold and ultracold collisions*, Rev. Mod. Phys. **71**, 1 (1999).

- [Win06] K. Winkler, G. Thalhammer, F. Lang, R. Grimm, J. Denschlag, A. Daley, A. Kantian, H. Buechler, and P. Zoller, *Repulsively bound atom pairs in an optical lattice*, Nature **441**, 853 (2006).
- [Wit05] D. Witthaut, M. Werder, S. Mossmann, and H. J. Korsch, *Bloch oscillations of Bose-Einstein condensates: Breakdown and revival*, Phys. Rev. E **71**, 036625 (2005).