

Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion des eindimensionalen Bosegases

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Magisters der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Mohamed Rabie

unter der Betreuung von
o. Univ.-Prof. Dr. Hanns-Christoph Nägerl

Institut für Experimentalphysik
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Innsbruck, Dezember 2011

Danksagungen

Als Erstes möchte ich mich bei meinem Betreuer Hanns-Christoph Nägerl bedanken, der es mir ermöglicht hat an den tollen Experimenten in seinem Team mitzuwirken. An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Rudi Grimm bedanken, dem Chef unserer Gruppe.

Ein großes Dankeschön geht an Elmar, einer derjenigen die unser Experiment aufgebaut haben. Er stand immer zur Hilfe und Diskussion bereit und hat wesentlich zu einem Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ich möchte mich auch bei Manfred, Hans, Katharina, und meinen ehemaligen sowie gegenwärtigen Diplomanden-Kollegen Lukas, Andreas, Oliver und Benjamin aus dem CsIII-Team für das gute Arbeitsklima bedanken. Meine Bürokollegen Albert und Johannes waren immer hilfsbereit und auch die Arbeitspausen waren „konstruktiv“. Ein weiteres Dankeschön allen anderen Kollegen in unserer Gruppe.

Erwähnen muss ich natürlich meine Kollegen Christopher, Sebastian, Hannes, Cornelia und Clemens, mit denen ich viel Zeit meines Studiums verbracht habe und viel über Physik diskutiert habe.

Und zu guter Letzt möchte ich mich bei meinen Eltern und meinen Geschwistern Karen und Nagea bedanken, die mich während meines Studiums immer unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Das ultrakalte Bosegas	3
2.1 Kollisionen im ultrakalten Cäsium Gas	4
2.1.1 Streutheorie	5
2.1.2 Feshbach-Resonanzen	8
2.2 Bose-Einstein Kondensation des idealen Gases	12
2.3 Das wechselwirkende Bosegas	14
3 Das eindimensionale Bosegas	19
3.1 Das Lieb-Liniger Gas	20
3.1.1 Exakte Lösung des Grundzustandes	21
3.1.2 Elementare Anregungen	26
3.1.3 Numerische Lösung der Lieb-Liniger Integralgleichungen . .	30
3.2 Das „quasi“-eindimensionale Bosegas	31
3.2.1 Dichteprofile in quasi 1D	32
3.3 Bosonisierung	37
4 Korrelationen in ultrakalten Gasen	43
4.1 Die Korrelationsfunktion	44
4.2 Korrelationen im 3D Bosegas	45
4.3 Korrelationen im wechselwirkenden 1D Gas	47
4.4 Drei-Körper Korrelation und Rekombinationen	50
4.4.1 Drei-Körper Rekombination im tiefen 2D-Gitter	51
5 Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion	53
5.1 Erzeugung des BEC	53
5.2 Messmethode	54
5.3 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 3D	56
5.4 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 1D	60

Inhaltsverzeichnis

6 Zusammenfassung und Ausblick	67
A Veröffentlichung im Rahmen dieser Diplomarbeit	69
B Matlab Codes	77
B.1 Lösung der Lieb-Liniger Integralgleichung	77
B.2 Dichteprofil des LL-Gases in LDA	78

KAPITEL 1

Einleitung

Eine Perlenkette stellt den wohl einfachsten Fall eines eindimensionalen Vielteilchensystems dar. Perlen können sich entlang einer Schnur vor und rückwärts bewegen, wogegen seitliches Ausweichen nicht möglich ist. Ihre anfängliche Reihenfolge bleibt selbst bei starkem Schütteln unverändert, da sie sich gegenseitig „den Weg versperren“. Erhält nur eine einzelne Perle einen Stoß, so wird aus demselben Grund die Dynamik des gesamten Kollektivs davon beeinflusst.

Schon anhand dieses klassischen Modells aufgefädelter Perlen, das sich komplett anders verhält als sich in alle Raumrichtungen frei bewegliche Kugeln, erahnt man die Besonderheit eindimensionaler Quantengase. Bereits bald nach der Begründung der Quantenmechanik fanden Theoretiker und Mathematiker Gefallen an quantenmechanischen Vielteilchensystemen in reduzierter Dimension. Die Reduktion der Freiheitsgrade ermöglicht eine starke Vereinfachung der mathematischen Beschreibung und erlaubt die Angabe analytischer Lösungen, was in einigen Pionierarbeiten eindrucksvoll demonstriert wurde [Bet31, Lut63, Lie63b, Cal71]. Dabei stieß man auf Eigenschaften des eindimensionalen Quantengases, welche sich unter bestimmten Voraussetzungen grundlegend von jenen in drei Dimensionen unterscheiden. Ein schönes Beispiel dafür ist die sogenannte Fermionisierung: dabei verhalten sich unendlich stark abstoßende Bosonen in vielerlei Hinsicht wie freie Fermionen.

Erst durch den technologischen Fortschritt bekam die mathematische „Spielwiese“ eindimensionaler Systeme ein reales Gesicht. Vor allem Entwicklungen in den Materialwissenschaften ermöglichten die Realisierung quasi-eindimensionaler Systeme. Das Verständnis von Elektronentransport in Nanoröhrchen aus Kohlenstoff [Iij91] oder entlang langer organischer Molekülketten (z.B. TMTSF-Salze) [Dre96], ist nur ein Beispiel aus diesem wachsenden Forschungsfeld, das auch Anwendungsperspektiven bietet. Gerade in Anbetracht der rasant fortschreitenden Miniaturisierung mikroelektronischer Bauteile ist die Kenntnis über die Transporteigenschaften von Elektronen durch dünne Drähte mit atomaren Durchmessern von großer Bedeutung. So erlauben etwa spezielle Verfahren, Goldatome in Form einer Kette der Reihe nach auf einer Isolatorplatine anzuordnen und die elektrischen Ströme durch dieses eindimensionale System zu untersuchen [Blu11]. Des Weiteren stellt das nicht verstandene Phänomen der Hochtemperatur-Supraleitung in diesem Zusammenhang eine interessante Herausforderung dar, die es sowohl experimentell als auch theoretisch zu bewältigen gilt. Klar ist, dass bei diesem Phänomen die Reduktion von drei auf zwei Dimensionen von

1 Einleitung

wesentlicher Bedeutung ist.

Als ideales System zur Untersuchung fundamentaler Vielteilchenphysik in einer Dimension erweisen sich ultrakalte Quantengase [Blo08, Caz10]. Hierzu werden Atome in den Lichtfeldern schmalbandiger Laser gekühlt und gefangen. Die Realisierung einer zweidimensionalen Stehwelle mit zwei gekreuzten retro-reflektierten Laserstrahlen erzeugt tausende parallele eindimensionale Röhren. Nahezu perfekte Isolation von äußeren Einflüssen und Kontrolle über die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Teilchen sind die wesentlichen Vorteile gegenüber den komplexen Systemen der Festkörperphysik. Experimente mit solchen Systemen konnten Vorhersagen bestens bestätigen. So gelang die Erzeugung stark korrelierter Gasphasen mit bemerkenswerten Eigenschaften, wie das *Tonks-Girardeau*-Gas bei starker Abstoßung zwischen den Atomen [Kin04, Köh04], oder das stark attraktive *Super-Tonks-Girardeau*-Gas [Hal09]. Des Weiteren konnte bei zusätzlichem Anlegen einer optischen Stehwelle in Richtung des eindimensionalen, stark wechselwirkenden Gases ein sogenannter *Pinning*-Übergang beobachtet werden [Hal10a]. Hierzu reicht bereits ein sehr schwaches periodisches Potential, um einen Phasenübergang in einen stark korrelierten Vielteilchenzustand herbeizuführen.

In dieser Arbeit werden die Eigenschaften des Bosegases in eindimensionaler Geometrie untersucht. Um einen Vergleich zum dreidimensionalen Bosegas zu ermöglichen, möchte ich im ersten Kapitel dessen wesentliche Eigenschaften wiederholen. Besonderes Augenmerk lege ich dabei auf die Beschreibung des stark wechselwirkenden Bosegases über *Bogoliubov-Theorie* und die experimentelle Kontrolle der Wechselwirkungsstärke mit *Feshbach-Resonanzen* im Falle von atomaren Cäsium. Im zweiten Kapitel möchte ich das eindimensionale Bosegas beschreiben. Dabei greife ich auf das berühmte *Lieb-Liniger-Modell* [Lie63b, Lie63a] zurück. Anschließend werde ich die Theorie der Zwei-Körperwechselwirkung im starken harmonischen Einschluss kurz erläutern [Ols98], was den einfachsten Fall sogenannter *Einschluss-induzierter Resonanzen* darstellt. Weiters werde ich die Beschreibung eindimensionaler Systeme mit dem Konzept der *Bosonisierung* erklären [Hal81], womit eine ganze Klasse von Quantengasen, die *Luttinger-Flüssigkeiten* [Lut63], in einer universellen Theorie zusammengefasst werden kann. Qualitativ können viele Eigenschaften von Quantengasen über deren Korrelationsfunktionen verstanden werden. Daher werden die Korrelationseigenschaften des Bosegases sowohl in einer als auch in drei Dimensionen in einem eigenen Kapitel zusammengefasst. Des Weiteren wird der Prozess der Drei-Körper-Rekombination betrachtet, da uns dieser den Zugang zur Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion ermöglicht. In Kapitel 5 beschreibe ich unsere Messungen, mit denen wir die Korrelationseigenschaften des stark wechselwirkenden Bosegases in ein- und dreidimensionaler Geometrie untersuchen. Abschließend fasse ich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gebe einen Ausblick auf weitere interessante Experimente, die demnächst durchgeführt werden könnten.

KAPITEL 2

Das ultrakalte Bosegas

Die quantenmechanische Natur der Schwerpunktbewegung eines Teilchens offenbart sich erst bei sehr tiefen Temperaturen. Diese Tatsache ist schon seit den frühen Anfängen der Quantenphysik bekannt. L. de Broglie postulierte den Wellencharakter von Materie, wonach jedem Teilchen (mit Impuls p) eine (de Broglie-) Wellenlänge $\lambda_{\text{dB}} = h/p$ zuzuordnen ist. Der Impuls ist durch die kinetischen Energie (und somit die Temperatur) über $p = \sqrt{2mE}$ gegeben. Im Folgenden nehmen wir an, dass es sich bei unseren Teilchen um Atome (z.B. Rb, Cs, ...) handelt. Natürlich gelten diese Betrachtungen auch für kalte Moleküle, welche aufgrund ihrer starken intermolekularen Dipolwechselwirkungen ganz besondere Eigenschaften aufweisen. Deren Untersuchung stellt im Hinblick auf neuartige Phasenzustände aber auch im Hinblick auf wichtige Erkenntnisse über die Funktionsweise chemischer Reaktionsmechanismen ein aktives Forschungsfeld dar.

Solange λ_{dB} kleiner als der mittlere Teilchenabstand in einer Atomwolke ist, „merken“ die Atome nichts von ihrer Wellennatur und verhalten sich als Kollektiv wie ein klassisches Gas. Erst bei sinkender Temperatur (steigender λ_{dB}) beginnen die Atome, Quanteneigenschaften zu offenbaren und man spricht dann vom kalten Quantengas, wenn der quantenmechanische Charakter des Streuprozesses sichtbar wird, d.h. die Teilchen untereinander in den niedrigsten Partialwellen streuen [Dal99]. Im Allgemeinen übersteigt dabei λ_{dB} sowohl die Van-der-Waals-Länge, welche die typische räumliche Ausdehnung des Streupotentials angibt, als auch die s-Wellenstreuulänge $a_{3\text{D}}$, welche den Streuprozess kalter Atome zumeist ausreichend beschreibt. Wird eine kritische Temperatur T_c unterschritten, bzw. übersteigt λ_{dB} den mittleren Teilchenabstand, d.h. die Phasenraumdichte $n\lambda_{\text{dB}}^3 \approx 1$, so setzt für bosonische Teilchen die nach ihren Entdeckern benannte Bose-Einstein Kondensation (BEC) ein. Dabei wird der quantenmechanische Grundzustand makroskopisch besetzt, bis schließlich bei $T = 0$ alle Atome im Grundzustand sind und gewissermaßen eine einzige Wellenmode bilden, in der die Welleneigenschaften dominieren.

Der technische Fortschritt in den letzten Jahren auf dem Gebiet der Teilchenfallen und Laserkühlung ermöglichte es eine große Anzahl von Atomen bis auf Temperaturen im sub- μK -Bereich zu kühlen und gleichzeitig zu fangen. Dies geschieht üblicherweise in einer magneto-optischen Falle (MOT), nachdem die Atome einen Zeeman-Abbremsler passiert haben. Dabei wird, unter Berücksichtigung des Doppler-Effekts, der „Impuls-Kick“, den ein Photon eines Lasers in Anwesenheit von Magnetfeldern

2 Das ultrakalte Bosegas

auf ein bewegtes Atom überträgt, ausgenützt. Für die Kondensation sind jedoch nK-Temperaturen nötig, welche allein mit dieser Technik nicht erreicht werden können und weitere Kühschritte erfordern. Im Falle von Cs-Atomen gelangt man über sogenanntes Raman-Seitenbandkühlen und anschließendes evaporatives Kühlen unter die kritische Temperatur. Hierzu sind im Allgemeinen Lichtfelder leistungsstarker Laser nötig, welche für die Atome durch die Dipolkraft ein Potential bereitstellen.

Die erstmalige Demonstration der Bose-Einstein Kondensation [And95, Dav95, Bra95] 70 Jahre nach ihrer Vorhersage war der Grundstein für eine Vielzahl von Experimenten, welche sich mit den grundlegenden Eigenschaften quantenmechanischer Vielteilchensysteme beschäftigten: von den Materiewellen-Eigenschaften eines BEC, über die Untersuchung von (Quanten-)Phasenübergängen bis hin zu möglichen Anwendungen im Bereich der Präzisionsmessung, Interferometrie und Atomuhren, welche oft unter dem Sammelbegriff „Materiewellen-Optik“ zusammengefasst werden. Dies geschieht in Anlehnung an die dabei verwendeten Techniken aus der klassischen Optik mit Lichtwellen. So wird etwa in der Atominterferometrie, analog zum Mach-Zehnder-Interferometer, die Phasendifferenz zwischen zwei unterschiedlichen Pfaden gemessen. Dabei übernehmen präzise Laserpulse die Rolle von Spiegeln bzw. Strahlteilern. Diese Methode dient vor allem der Messung von Gravitationseffekten im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie oder auch der genaueren Bestimmung von Fundamentalkonstanten.

In diesem Kapitel wird der Effekt von Wechselwirkung im Bosegas in 3D-Geometrie genauer betrachtet. Dabei liegt das Augenmerk in der ersten Hälfte dieses Kapitels vor allem auf den Streueigenschaften von Cäsium und dessen Kontrolle im Experiment über sogenannte Feshbach-Resonanzen. Dabei kann die Stärke der Wechselwirkung im Bosegas fast nach Belieben eingestellt werden: von stark attraktiv, über nicht-wechselwirkend, bis hin zu stark abstoßend. Im zweiten Teil gehe ich dann auf die Vielteilchenphysik ein und gebe einen kurzen Überblick auf das Phänomen der Bose-Einstein Kondensation des nicht-wechselwirkenden (idealen) Gases. In Form der sogenannten *Gross-Pitaevskii* Gleichung wird eine Beschreibung des schwach wechselwirkenden BEC im Rahmen einer *Mean-Field*-Theorie angeführt. Anschließend werden die Grundzüge der *Bogoliubov-Theorie* angegeben, welche für zunehmende Wechselwirkungsstärken an Bedeutung gewinnt und über die gewöhnliche *Mean-Field*-Beschreibung hinausgeht.

Des Weiteren dient dieses Kapitel dazu, den späteren Vergleich zum eindimensionalen Gas zu erlauben (Kap.3) und um die wesentliche Unterschiede zwischen 1D- und 3D-Gas hervorzuheben.

2.1 Kollisionen im ultrakalten Cäsium Gas

Das Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation (BEC) hat zunächst einmal nichts mit einer möglichen Teilchenwechselwirkung zu tun. BEC tritt also für ein nicht-

wechselwirkendes System von identischen Bosonen auf, so wie von A. Einstein erstmals beschrieben. Wechselwirkungen spielen aber sehr wohl eine Rolle. So ist die Erzeugung eines BEC im Experiment erst durch evaporatives Kühlen möglich, welches *elastische Stöße* zur laufenden Thermalisierung verlangt. Bei typischen Dichten in unseren Experimenten von $n \sim 10^{13} \text{cm}^{-3}$ wird dabei die kinetische Energie vor allem über elastische Zwei-Körper-Stöße zwischen den Atomen umverteilt, da Stöße höherer Ordnung im Vergleich dazu viel unwahrscheinlicher sind.

Im Gegensatz dazu führen *inelastische Stöße* zumeist zu Teilchenverlusten aus der Atomwolke. Während Verluste durch Kollisionen von Atomen in der Falle mit dem Hintergrundgas erst auf Zeitskalen von Minuten bedeutend werden, sind inelastische Zwei-Körper-Stöße im Falle von Cäsium im untersten Zeeman-Subniveau $|F = 3, m_F = 3\rangle$ energetisch erst gar nicht möglich. Daher dominieren inelastische Drei-Körper-Stöße (bzw. Drei-Körper-Rekombination) den Teilchenverlust. Dabei bilden drei stoßende Teilchen ein Molekül und ein übergebliebenes Atom, welches einen Teil der freiwerdenden Bindungsenergie aufnimmt. Die bei einem Stoß gewonnene kinetische Energie der Rekombinationsprodukte kann für das Verlassen der Falle ausreichend sein. Eine typische Verlustrate für unser BEC ist $\Gamma \sim 10^{-2} \text{s}^{-1}$, welche jedoch stark von der Dichte, Streulänge und der Dimensionalität des Systems abhängt. Der Prozess des Drei-Körper-Stoßes wird in Kapitel 4.4 genauer beschrieben.

Üblicherweise wechselwirken die Atome aufgrund ihres temporären elektrischen Dipolmoments (und Quadrupolmoments) über attraktive *Van-der-Waals-Kräfte*. Abb.(2.1) zeigt die Potentialkurven des untersten Cs Zustandes ($6s + 6s$) für den Singulett- und Triplettzustand in der Born-Oppenheimer Näherung. Das Van-der-Waals-Potential enthält Dipol-Dipol, Quadrupol-Quadrupol und höhere Wechselwirkungsterme, also $H_{vdW} = C_6 r^{-6} + C_8 r^{-8} + O(r^{-10}, r^{-11})$. Für große Distanzen wirkt somit vor allem die Dipol-Dipol Wechselwirkung $C_6 r^{-6}$. Die Hyperfeinaufspaltung in die Zustände $|F = 3, F = 3\rangle$, $|F = 4, F = 3\rangle$ und $|F = 4, F = 4\rangle$ ist um mehrere Größenordnungen kleiner als die intermolekularen Wechselwirkungen und dominiert erst bei annähernd freien Atomen.

Auf sehr kleinen Distanzen dominiert die sogenannte *Austauschwechselwirkung*, welche durch eine Kombination von Pauli-Prinzip für die Valenzelektronen und Coulomb-Wechselwirkung zustande kommt. Da die Gesamtwellenfunktion der fermionischen Valenzelektronen antisymmetrisch unter Teilchenaustausch ist, ist die Ortswellenfunktion je nach Spinzustand symmetrisch (Singulett) oder antisymmetrisch (Triplett). Für den Singulettzustand erweist sich der erhöhte Aufenthalt der negativ geladenen Elektronen zwischen den zwei positiv geladenen Kernen als energetisch günstiger und führt, im Gegensatz zum Triplettzustand, zu einer starken Bindung der Atome.

2.1.1 Streutheorie

Der elastische Stoß zweier (identischer) Teilchen, die über ein radialsymmetrisches Potential mit endlicher Reichweite wechselwirken, kann mittels Streuphasenrechnung

2 Das ultrakalte Bosegas

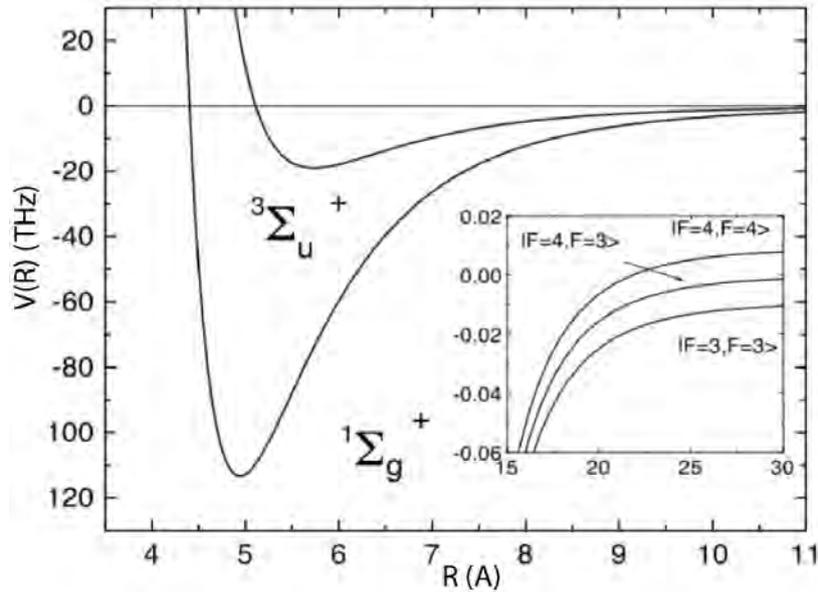


Abbildung 2.1: **Wechselwirkungspotential von Cs:** Wechselwirkungsenergie $V(R)$ als Funktion des Abstands R der beiden Kerne. Der Singulettzustand $^1\Sigma_g^+$ liegt aufgrund der Austauschwechselwirkung energetisch tiefer als der Triplettzustand $^3\Sigma_u^+$. Bei großem Teilchenabstand mündet die Energieaufspaltung in die bekannten Hyperfeinzustände freier Atome (Einfügung). Abb. übernommen aus [Chi01].

beschrieben werden. Der asymptotische radiale Anteil der Wellenfunktion unterscheidet sich dabei von jener des freien Teilchens nur durch eine Streuphase $\delta_l(k)$, wobei l die Drehimpulsquantenzahl der Partialwellenstreuzustände und k die Wellenzahl ist.

Allgemein wird bei einer Streuung nach Lösungen der Form

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (2.1)$$

gesucht. Dies entspricht einer einfallenden ebenen Welle und einer ausfallenden Kugelwelle mit Streuamplitude $f(\theta)$, welche mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ verknüpft ist.

Das zentrale Ergebnis der Streutheorie ist die starke Vereinfachung in der Beschreibung des Streuprozesses. Für *ultrakalte* bosonische Gase gibt $\delta_{l=0}$ den einzig relevanten Beitrag zur Streuung. Man spricht von s-Wellen-Streuung. Alle höheren Partialwellen werden nicht gestreut, da ihre Energie nicht ausreicht, um die Drehimpulsbarriere des effektiven Zwei-Körper Potentials zu überwinden. Im Gegensatz dazu streuen im *kalten* Bosegas auch höhere Partialwellen (p, d, f, \dots). Die folgenden Betrachtungen beziehen sich immer auf das ultrakalte Gas.

Eine mit der Streuphase direkt zusammenhängende geometrische Größe ist die s-

Wellen-Streulänge

$$a_{3D} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_{l=0}(k)}{k}. \quad (2.2)$$

Diese beschreibt die Streuung zwischen ultrakalten Teilchen ausreichend. Der *universelle* Charakter der Streulänge a_{3D} für Streuung zwischen Atomen in einem bestimmten Spin-Zustand beruht auf deren Eigenschaft, dass nur ihr Wert die Physik der Kollision bestimmt, unabhängig von der genauen Form des Wechselwirkungspotentials.

Um den Wirkungsquerschnitt eines elastischen Zwei-Körper-Stoßes zu berechnen, wird das wahre (komplizierte) Potential durch das sogenannte (*Pseudo-*) *Kontaktpotential* der Form

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}) = g_{3D}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r}(r\psi(\mathbf{r})) \quad (2.3)$$

ersetzt [Dal99]. Die Kopplungskonstante g_{3D} gibt die Stärke der Wechselwirkung an, während die Deltafunktion eine lokale Abstoßung (bzw. Anziehung) bei positiven (bzw. negativen) g_{3D} zur Folge hat. Ohne der Regularisierung $\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot)$ würde das Kontaktpotential in 3D zu gar keiner Streuung führen, wie man sich am Beispiel einer harten Kugel, im Grenzfall verschwindenden Durchmessers $d \rightarrow 0$, überlegen kann. Ein weiterer Grund für die Wahl des (Pseudo-)Kontaktpotentials liegt, im Gegensatz zum wahren Potential, in dessen einfachen Handhabung im Rahmen der Born-Näherung. In diesem Sinn ist die Kenntnis des wahren Potentials nicht wichtig, solange das (Pseudo-)Kontaktpotential die Streueigenschaften, speziell die s-Wellen-Streulänge a_{3D} , wiedergibt. Der totale Wirkungsquerschnitt kann dann berechnet werden [Dal99] und ergibt sich zu

$$\sigma(k) = \frac{8\pi a_{3D}^2}{1 + k^2 a_{3D}^2}. \quad (2.4)$$

Im Grenzfall kleiner bzw. großer Relativimpulse k vereinfacht sich dieser zu

$$\sigma(k) = \begin{cases} 8\pi a_{3D}^2, & \text{wenn } ka_{3D} \ll 1, \\ 8\pi/k^2, & \text{wenn } ka_{3D} \gg 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Die Streulänge a_{3D} ist über die Born-Näherung mit der Kopplungskonstante über die einfache Relation

$$g_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2 a_{3D}}{m} \quad (2.6)$$

verknüpft [Dal99]. Diese spielt in der Vielteilchen-Beschreibung eine wichtige Rolle, da dort zumeist das Kontaktpotential herangezogen wird. Positive (negative) Streulängen bedeuten in diesem Zusammenhang repulsive (attraktive) Wechselwirkung, und im idealen Gas gilt $a_{3D} = 0$.

Streuung am Kastenpotential

Das einfache Beispiel der Streuung am Kastenpotential zeigt schön den Zusammenhang zwischen der s-Wellenstreulänge und den gebundenen Zuständen im Kasten. Dies

2 Das ultrakalte Bosegas

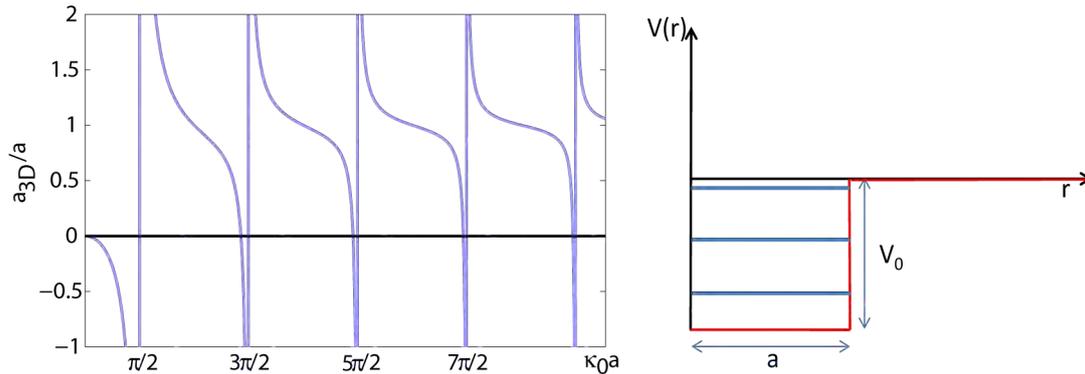


Abbildung 2.2: **Gebundene Zustände im Kastenpotential:** s-Wellen Streulänge a_{3D} als Funktion des Potentialparameters $\kappa_0 a$. Wird das Potential tiefer, so treten an den Stellen $\kappa_0 a = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ jeweils neue gebundene Zustände bei $V = 0$ auf. Dies geht einher mit der Divergenz von a_{3D} an denselben Stellen.

trägt gleichzeitig zum Verständnis von Feshbach-Resonanzen bei, wie man später sehen wird.

Das Kastenpotential ist durch seine Tiefe V_0 und Ausdehnung a festgelegt (Abb. (2.2)). Die Streuphase δ_0 ergibt sich aus der Stetigkeitsbedingung der Wellenfunktion am Rand des Kastens. Mit Gl. (2.2) erhält man für die s-Wellenstreulänge [Dal99]

$$a_{3D} = a \left(1 - \frac{\tan(\kappa_0 a)}{\kappa_0 a} \right) \quad \text{mit} \quad \kappa_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar. \quad (2.7)$$

Die Streulänge a_{3D} divergiert somit an den Stellen $\kappa_0 a = \pi/2, 3\pi/2, \dots$. Andererseits, wenn man die gebundenen Zustände im Kasten standardmäßig ausrechnet und das Potential langsam tiefer macht (also κ_0 vergrößert), dann kommt genau an diesen Stellen immer ein neuer Zustand an der Kante ($V = 0$) des Topfs dazu.

Das gleichzeitige Auftreten von Divergenzen der Streulänge und gebundenen Zuständen gilt auch für anders geformte Potentiale und wird *Levinson Theorem* genannt. Der Grund dafür liegt im Folgenden: Da für ultrakalte Stöße die Streuzustandsenergie gegen Null geht ist der Streuzustand mit dem letzten gebundenen Zustand (fast) entartet. Genau genommen ist wegen der Kopplung der zwei Zustände der exakte quantenmechanische Zustand eine Superposition der beiden. Dadurch wird der Streuprozess verstärkt, was sich dann in einer Resonanz der Streulänge widerspiegelt. Der Sprung in der Streulänge von $a_{3D} \rightarrow -\infty$ auf $a_{3D} \rightarrow \infty$ entspricht einer Streuzustandsenergie, die knapp oberhalb bzw. unterhalb von der Energie des gebundenen Zustands liegt.

2.1.2 Feshbach-Resonanzen

Die Stärke der Wechselwirkung in ultrakalten Atom-Gasen kann elegant mit Hilfe sogenannter Feshbach-Resonanzen kontrolliert werden [Chi10]. Dadurch konnten in den

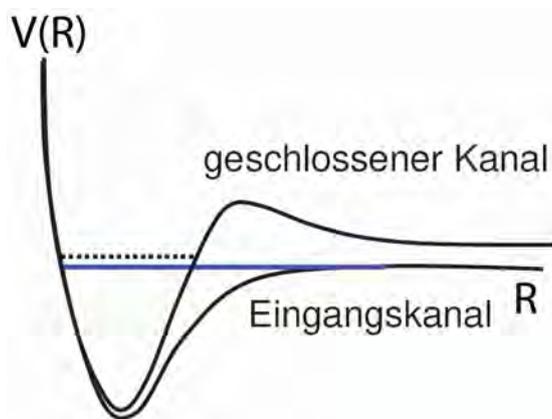


Abbildung 2.3: **Feshbach-Resonanz:** Die Wechselwirkungsenergie als Funktion des Abstands der beiden Kerne für Eingangskanal (unten) und geschlossenen Kanal (oben). Zwei kollidierende Atome im Eingangskanal (im ultrakalten Regime $E \rightarrow 0$) und ein gebundener Zustand des geschlossenen Kanals (gepunktete Linie) können via Magnetfeldvariation (Zeeman-Effekt) in Entartung gebracht werden, sofern beide Kanäle unterschiedliche magnetische Momente aufweisen. Abb. übernommen aus [Chi01].

letzten Jahren im Kontext ultrakalter Quantengase unzählige neuartige Experimente, vor allem auf dem Gebiet der Vielteilchenphysik, durchgeführt werden. Als Highlight der Quantengasphysik konnte der BEC-BCS Übergang in Fermigasen untersucht werden [Che10]. Des Weiteren macht diese Methode die Erzeugung von ultrakalten Molekülen möglich [Köh06], sowie den experimentellen Nachweis von Efimov Trimer-Zuständen [Kra06]. Auch Soliton-Physik im attraktiv wechselwirkenden Bosegas wurde mit Feshbach-Resonanzen zugänglich [Cor06].

Die Idee einer Feshbach-Resonanz kann in einem einfachen Bild (Abb. (2.3)) erklärt werden. Im Prinzip handelt es sich um Streuresonanzen, wie sie auch beim Kastenpotential aus Abschnitt (2.1.1) auftreten. Nur lassen sich die Parameter a und V_0 nicht variieren. Daher bedarf es eines Tricks: Statt eines Kanals nimmt man zwei Kanäle. Konkret wird ein einfallender Streuzustand (*Eingangskanal*) in Entartung mit einem gebundenen Zustand einer benachbarten Potentialkurve gebracht. Solange dieser energetisch über dem Eingangskanal liegt wird er *geschlossener Kanal* genannt. Wenn Eingangskanal und geschlossener Kanal aus unterschiedlichen Hyperfeinzuständen F der Atome herrühren, können durch Variation des Magnetfeldes bestimmte magnetische Unterzustände m_F , samt der Potentialkurve, entsprechend Zeeman-Aufspaltung zueinander verschoben werden.

Nun geht die Entartung von Eingangskanal und offenem Kanal einher mit der Divergenz der s-Wellenstreulänge a_{3D} , wie bereits am Beispiel des Kastenpotentials gezeigt wurde. Dieses Szenario wird *Feshbach-Resonanz* (oder auch *Fano-Feshbach-Resonanz*) genannt und trägt die Namen ihrer Entwickler. H. Feshbach verwendete dieses Konzept zur Erklärung von Streuprozessen im Atomkern [Fes58, Fes62], wäh-

2 Das ultrakalte Bosegas

rend U. Fanos Betrachtungen durch Experimente aus der Atomphysik motiviert waren [Fan35, Fan61].

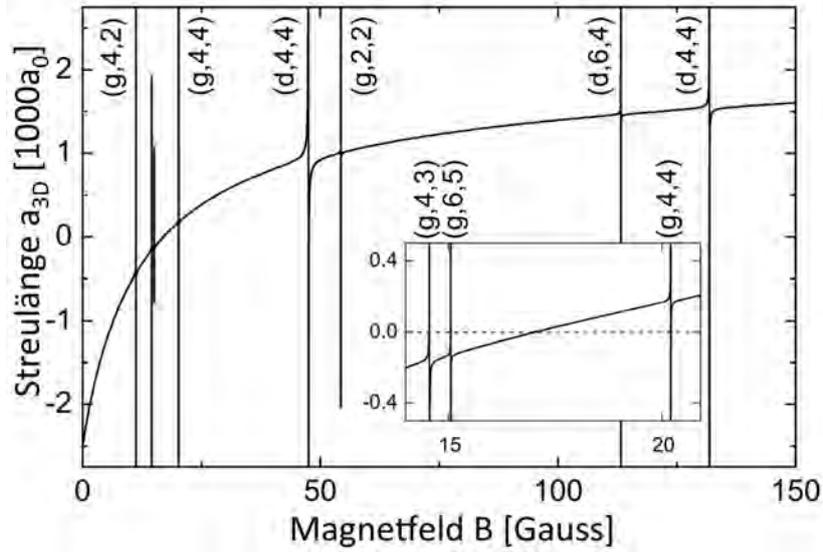


Abbildung 2.4: **Feshbach-Resonanzen in Cs**: aufgetragen ist die Streulänge als Funktion des externen Magnetfeldes B . Beide Cs Atome sind im Zustand $|F = 3, m_F = 3\rangle$. Die breite s-Wellen-Resonanz bei $B_0 \approx -11\text{G}$ ist experimentell am besten zugänglich. Zusätzlich treten Resonanzen (l, f, m_f) durch die Kopplung an d- und g-Wellen Molekülzustände auf. Dabei ist l die Rotationsquantenzahl des Molekülzustandes, f entspricht der Summe der atomaren Gesamtdrehimpulse und m_f ist die dazugehörige Magnetquantenzahl. Zu den genauen Positionen der schmalen d- und g-Wellen Resonanzen siehe [Chi04]. Abb. übernommen aus [Chi04].

Der typische Verlauf einer Feshbach-Resonanz kann durch einen einfachen Ausdruck wiedergegeben werden

$$a_{3\text{D}}(B) = a_{3\text{D}}^{(0)} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right). \quad (2.8)$$

Dabei ist B_0 der Ort der Resonanz, ΔB deren Breite und $a_{3\text{D}}^{(0)}$ die Hintergrund-Streulänge.

Gerade Cs zeigt, aufgrund verstärkt auftretender relativistischer Effekte, bei Anlegen eines Magnetfeldes unzählige Resonanzen der Streulänge (Abb.2.4)[Chi04, Mar07a]. Diese Besonderheit ist vor allem der Spin-Spin-Dipol- und der Spin-Orbit-Wechselwirkung zweiter Ordnung zuzuschreiben. In unseren Experimenten nutzen wir zumeist die breite s-Wellen-Resonanz bei $B_0 \approx -11\text{G}$. Mit ihr können wir $a_{3\text{D}}$ zwischen $-2500a_0$ und $1500a_0$ kontrollieren. Des Weiteren hat $a_{3\text{D}}$ bei $B \approx 17\text{G}$ einen Nulldurchgang, womit wir ein nicht-wechselwirkendes BEC realisieren können.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass für unser 1D-System die 1D-s-Wellen Streulänge $a_{1\text{D}}$ aufgrund des starken radialen Einschlusses gegenüber $a_{3\text{D}}$ stark verändert ist [Ols98]. Kapitel (3.2) beschäftigt sich näher mit diesen sogenannten *Einschluss-induzierten Resonanzen*.

2.2 Bose-Einstein Kondensation des idealen Gases

Bose-Einstein Kondensation bezieht sich auf ein Ensemble nicht-wechselwirkender Bosonen im thermodynamischen Grenzfall. Dieses Phänomen resultiert allein aus der Quantenstatistik des idealen Bosegases. Der Effekt von Wechselwirkung ist für die Kondensation an sich zunächst von untergeordneter Bedeutung und wird im nächsten Kapitel beschrieben. Um Bose-Einstein-Kondensation zu verstehen, ist eine statistische Beschreibung eines großen Ensembles bosonischer Teilchen nötig. Diese gehorchen der Bose-Statistik [Pit03]

$$n(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} - 1}. \quad (2.9)$$

Da die Verteilungsfunktion $n(\epsilon_i)$ positiv definiert ist, gilt für das chemische Potential für alle i 's: $\mu < \epsilon_i$. Der Grundzustand kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit Null gesetzt werden, $\epsilon_0 = 0$, woraus folgt: $\mu < 0$. Führt man die Fugazität ein $z = e^{\mu/k_B T}$, so ist die Besetzung des Grundzustandes

$$n_0 = \frac{z}{1 - z}, \text{ und } 0 < z < 1. \quad (2.10)$$

Die Fugazität und damit μ wird bei fester Teilchenzahl N und Temperatur T durch die Normierungsbedingung $N = \sum_i n(\epsilon_i)$ festgelegt. Üblicherweise kann die Summe in ein interpolierendes Integral mit einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion $n(\epsilon)$ übergeführt werden, denn im thermodynamischen Limes $N, V \rightarrow \infty$ (mit $n = N/V = \textit{konstant}$) gehen die mittleren Besetzungen $n(\epsilon_i)/V \rightarrow 0$. Jedoch kann es für den Grundzustand passieren, wenn $z \rightarrow 1$, dass dieser einen Beitrag n_0/V leistet, der vergleichbar mit dem Beitrag aller anderen Energieniveaus zusammen ist. Somit muss der Grundzustand separat behandelt werden, und man erhält die Normierungsbedingung

$$N = \frac{z}{1 - z} + \int_{0^+}^{\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \frac{1}{z^{-1} e^{\epsilon/k_B T} - 1}. \quad (2.11)$$

Hier ist $\rho(\epsilon)$ die Zustandsdichte und $\rho(\epsilon)d\epsilon$ gibt die Anzahl der verschiedenen Zustände in einem Intervall $d\epsilon$ an. Für Teilchen im 3D Kasten ist $\rho(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$ und für das 3D harmonische Potential $\sim \epsilon^2$. Die Zustandsdichte eines allgemeinen Potentials der Form $U(r) = U_0 r^{3/\delta}$ ist $\rho(\epsilon) = A e^{\delta+1/2}$, mit A einer Konstanten die sich aus der Form δ und Stärke U_0 des Potential sowie von der Masse der Teilchen berechnen lässt. Für das Kastenpotential ist $\delta = 0$, während für den harmonischen Einschluss $\delta = 3/2$ gilt.

Dann kann Gleichung (2.11) folgendermaßen geschrieben werden

$$N = \begin{cases} A(U_0 T)^{3/2+\delta} \Gamma(3/2 + \delta) g_{3/2+\delta}(z), & \text{wenn } T > T_c, \\ n_0 + A(U_0 T)^{3/2+\delta} \Gamma(3/2 + \delta) g_{3/2+\delta}(1), & \text{wenn } T < T_c. \end{cases}$$

Hier sind $g_\alpha(z)$ die Bose-Funktionen und $\Gamma(\alpha)$ die Gammafunktion. Für die Besetzung

des Grundzustandes ergibt sich [Bag87]

$$\frac{n_0}{N} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } T > T_c, \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2+\delta}, & \text{wenn } T < T_c, \end{cases} \quad (2.12)$$

wobei bei der kritischen Temperatur [Bag87]

$$T_c = \left(\frac{N}{AU_0^{3/2+\delta} \Gamma(3/2 + \delta) g_{3/2+\delta}(1)} \right)^{2/(3+2\delta)}$$

die Kondensation einsetzt.

In unseren Experimenten ist das BEC in guter Näherung in einer harmonischen Falle mit Frequenzen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Das Dichteprofil ist dann jenes von N Teilchen im energetischen Grundzustand des harmonischen Oszillators $n(x, y, z) = N|\psi_0(x, y, z)|^2$, mit

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar} \right)^{3/4} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2) \right), \quad (2.13)$$

wobei $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_x \omega_y \omega_z}$.

Thermische Teilchen gehorchen der Maxwell-Boltzmann Verteilung $f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \sim \exp[\sum_i (-\mathbf{p}_i^2/2m + U(\mathbf{r}_i))/k_B T]$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, Teilchen 1 am Ort \mathbf{r}_1 mit Impuls \mathbf{p}_1 , Teilchen 2 am Ort \mathbf{r}_2 mit Impuls \mathbf{p}_2 , usw. aufzufinden. Die Dichte eines Ensembles thermischer Atome erhält man durch Ausintegration aller Orts- und Impulskoordinaten der Phasenraumdichte der Maxwell-Boltzmann Verteilung, bis auf die Ortskoordinate z.B. des ersten Teilchens \mathbf{r}_1 . Das Dichteprofil des thermischen Gases ist dann

$$n(\mathbf{r}) = N \left(\frac{m\bar{\omega}^2}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \right). \quad (2.14)$$

Beide Dichten, sowohl des BEC als auch des thermischen Gases, sind zwar gaußförmig, jedoch ist die Breite des BEC signifikant schärfer. Daher ist es in *in-situ* Absorptionen Bildern der Atomwolke prinzipiell möglich den thermischen vom kondensierten Anteil zu unterscheiden. Dann kann mit Gleichung (2.12) in Verbindung mit (2.13) und (2.14) die Temperatur in Einheiten von T_c bestimmt werden. Nur ist das im Allgemeinen nicht die Methode der Wahl. Denn sie stellt zum einen große Anforderungen an das Auflösungsvermögen des Abbildungssystem und zum anderen tritt bei großen Dichten das Problem einer Sättigung auf, wenn die Atomwolke das gesamte Licht absorbiert. Zur Bestimmung der Temperatur oder der Gesamtteilchenzahl N der Probe dienen daher zumeist *time-of-flight*-Absorptionen Bilder des expandierenden Gases nach einer gewissen Haltezeit. Für ein wechselwirkendes BEC wird dabei die gesamte anfängliche Wechselwirkungsenergie am Ende in die kinetische Energie der Expansion umgewandelt. Dies kann im Experiment als klare Demonstration der Kontrolle über die Streulänge dienen [Kra04].

2.3 Das wechselwirkende Bosegas

Der Nulldurchgang der breiten Feshbach-Resonanz entspricht im Experiment einem idealen BEC. Im Allgemeinen liegt jedoch ein wechselwirkendes BEC vor, da für die Streulänge zumeist $a_{3D} \neq 0$ gilt. Dabei gewinnen Wechselwirkungseffekte mit steigender Streulänge stetig an Bedeutung und verändern Eigenschaften wie Energie, chemisches Potential oder Dichteverteilung des Kondensats. Der sogenannte *Gasparameter* na_{3D}^3 wird herangezogen, um die Stärke der Wechselwirkung in einem Quantengas zu quantifizieren. In den meisten Quantengas-Experimenten ist die Streulänge viel kleiner als der mittlere Teilchenabstand, also $na_{3D}^3 \ll 1$, und somit dominieren elastische Zwei-Körper-Stöße. Man spricht dann vom *schwach wechselwirkenden Gas*. Unser BEC hat typische Dichten von $n \sim 10^{13} \text{cm}^{-3}$ bei Streulängen von $a_{3D} \sim 10^2 a_0$, mit a_0 dem Bohr-Radius. Somit ist der Gasparameter $na_{3D}^3 \sim 10^{-5}$.

Hier möchte ich kurz die Auswirkungen von kurzreichweitiger Wechselwirkung für das Kondensats anhand des Kontaktpotentials (vgl. Gl.(2.3)) erläutern. In zweiter Quantisierung schreibt sich der Hamilton-Operator des schwach wechselwirkenden Gases [Pit03]

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) + \frac{g_{3D}}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

Die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für den Feldoperator $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ ist dann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g_{3D} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.16)$$

Gross-Pitaevskii-Gleichung und Thomas-Fermi-Näherung

Unter der Annahme, dass für eine große Teilchenzahl N fast nur der Grundzustand besetzt wird, kann der Feldoperator durch eine Funktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ ersetzt werden

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \phi_n(\mathbf{r}, t) \hat{a}_n \approx \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

Dabei sind $\phi_n(\mathbf{r}, t)$ die Eigenfunktionen des freien Hamilton-Operators und \hat{a}_n die Vernichter-Operatoren der jeweiligen Mode n . Einsetzen in (2.16) führt zur bekannten Gross-Pitaevskii-Gleichung (GP)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g_{3D} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.18)$$

einer nicht-linearen Schrödingergleichung, welche eine sogenannte *Mean-Field*-Beschreibung ist [Pit03].

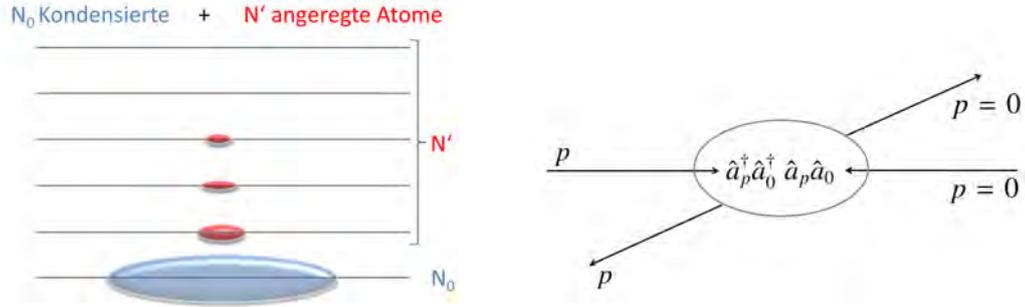


Abbildung 2.5: **Bogoliubov-Näherung:** links: Der Großteil der N Atome sind im Kondensat. Nur ein kleiner Teil N' ist in angeregten Zuständen. rechts: Schematische Darstellung einer der drei Wechselwirkungsterme in Gl. (2.24). Ein angeregtes Teilchen ($p \neq 0$) kollidiert mit einem kondensierten Teilchen ($p = 0$). Nach dem Stoß ist wiederum eines kondensiert, das andere angeregt.

Die zeitunabhängige GP-Gleichung hat die Form

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu + g_{3\text{D}} |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.19)$$

Für das BEC mit genügend starker Wechselwirkung, wo $Na_{3\text{D}}/\bar{a} \gg 1$ (mit $\bar{a} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$), wird die Dichte in guter Näherung durch das sogenannte *Thomas-Fermi-Profil* beschrieben [Bay96]

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = n_{\text{TF}}^{(0)} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), \quad (2.20)$$

vorausgesetzt der Gasparameter ist stets $na_{3\text{D}}^3 \ll 1$. Die zentrale Dichte $n_{\text{TF}}^{(0)} = \mu_{\text{TF}}/g_{3\text{D}}$ und die Thomas-Fermi-Radien $R_i = \sqrt{2\mu_{\text{TF}}/m\omega_i^2}$ sind hier durch die Kopplungskonstante $g_{3\text{D}} = 4\pi\hbar^2 a_{3\text{D}}/m$ und dem chemischen Potential gegeben [Bay96]

$$\mu_{\text{TF}} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na_{3\text{D}}}{\bar{a}} \right)^{2/5}. \quad (2.21)$$

Bogoliubov-Theorie

Für anwachsende Gasparameter $na_{3\text{D}}^3$ gewinnen Beiträge höher angeregter Eigenzustände an Bedeutung und Quantenfluktuationen nehmen zu. Um diese zu beschreiben stellt man den Hamilton-Operator (2.15) am besten in der Basis ebener Wellen mit Erzeuger/Vernichter-Operatoren $\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p$ dar [Pit03]

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} \hat{a}_p. \quad (2.22)$$

2 Das ultrakalte Bosegas

Fluktuationen entsprechen dann Streuprozessen zwischen dem Grundzustand ($p = 0$) und höheren Moden. Mit diesem Ansatz erhält man

$$\hat{H} = \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{g_{3D}}{2V} \sum_{p_1, p_2, q} \hat{a}_{p_1+q}^\dagger \hat{a}_{p_2-q}^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2}. \quad (2.23)$$

Wenn der Großteil der Atome kondensiert ist, dann streuen im Wechselwirkungsterm von (2.23) in erster Näherung Atome im Grundzustand ($p = 0$) untereinander. In zweiter Ordnung sind unter Impulserhaltung Kollisionen mit höher angeregten Moden ($p \neq 0$) möglich. Der Hamilton-Operator (2.23) vereinfacht sich in erster und zweiter Ordnung folglich zu

$$\hat{H} \approx \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{g_{3D}}{2V} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \frac{g_{3D}}{2V} \sum_{p \neq 0} \left(4 \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_0 + \hat{a}_{-p}^\dagger \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-p} \hat{a}_p \right), \quad (2.24)$$

wobei der erste Term die kinetische Energie und der zweite Streuung zwischen kondensierten Atomen beschreibt und die bereits bekannten Mean-Field-Ergebnisse der GP-Gleichung liefert. Die drei Ausdrücke zweiter Ordnung sind Streuprozesse mit nicht-kondensiertem Beiträgen und sind mit Quantenfluktuationen verknüpft:

- $4 \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_p \hat{a}_0$: Kollision zwischen kondensierten ($p = 0$) und nicht-kondensierten Atomen ($p \neq 0$).
- $\hat{a}_{-p}^\dagger \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0$: Zwei kondensierter Atome werden durch die Kollision in angeregte Zustände $p, -p$ gehoben, mit entgegengesetzten Impulsen.
- $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-p} \hat{a}_p$: Umgekehrt, können auch zwei nicht-kondensierte Teilchen durch die Kollision ins Kondensat zurückkommen.

Man kann sich mit Hilfe der Vertauschungsregel $[a_p, a_{p'}^\dagger] = \delta_{p,p'}$ überzeugen, dass der Hamilton-Operator (2.24) auf eine quadratische Form gebracht werden kann

$$\hat{H} \approx \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \frac{g_{3D} N^2}{2V} + \frac{g_{3D} N}{2V} \sum_{p \neq 0} \left(2 \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_{-p}^\dagger \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_{-p} \hat{a}_p + \frac{m g_{3D} n}{p^2} \right), \quad (2.25)$$

wobei die Kopplungskonstante g_{3D} renormalisiert wurde [Lan80]

$$g_{3D} \rightarrow g_{3D} \left(1 + \frac{g_{3D}}{V} \sum_p \frac{m}{p^2} \right). \quad (2.26)$$

Bisher wurde nämlich die Kopplungskonstante immer über die erste Näherung der Born-Reihe

$$|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \hat{G} \hat{V} |\psi_{\mathbf{k}}\rangle \quad (2.27)$$

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{V} |\psi_{\mathbf{k}}\rangle = \langle \mathbf{k}' | \hat{V} |\mathbf{k}\rangle + \langle \mathbf{k}' | \hat{V} \hat{G} \hat{V} |\psi_{\mathbf{k}}\rangle + \dots \quad (2.28)$$

definiert. Diese ist eine Integralgleichung (hier in Dirac-Notation), mit der Greenschen Funktion \hat{G} und dem Wechselwirkungspotential \hat{V} . Die Streulösung $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$ ergibt sich dann iterativ. Für das Kontaktpotential (vgl. Gl.(2.3)) ergibt der erste Term $\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle = g_{3D}$ gemäß Gl.(2.6). Inkludiert man den nächst höheren Term erhält man für g_{3D} die Korrektur (2.26) [Lan80].

Da dieser Hamilton-Operator in den Teilchenoperatoren quadratisch ist, kann er diagonalisiert werden. Das heißt, es können neue bosonische Operatoren $\hat{b}_p, \hat{b}_p^\dagger$ eingeführt werden, so dass

$$\hat{H} = E_0 + \sum_p \epsilon(p) \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p. \quad (2.29)$$

Die Grundzustandsenergie erfährt eine Korrektur [Pit03]

$$E_0 = \frac{g_{3D} N^2}{2V} \left(1 + \frac{128}{15 \sqrt{\pi}} \sqrt{na_{3D}^3} \right). \quad (2.30)$$

Der Vakuumzustand der ursprünglich Teilchenoperatoren \hat{a}_p ist natürlich jener ohne Teilchen. Der Grundzustand (mit Energie E_0) ist gleichzeitig der Vakuumzustand der neuen Quasi-Teilchen Operatoren \hat{b}_p . Die Operatoren $\hat{b}_p^\dagger, \hat{b}_p$ erzeugen/vernichten also Anregungen (bzw. Quasi-Teilchen). Das Anregungsspektrum ist

$$\epsilon(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + 2ng_{3D} \frac{p^2}{2m}} \approx \begin{cases} v_s p, & p \rightarrow 0, \\ p^2/2m, & p \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.31)$$

Die Linearität des Spektrums bei kleinen Energien zeigt, dass die Anregungen Schallwellen mit Schallgeschwindigkeit $v_s = \sqrt{ng_{3D}/m}$ sind. Für große Energien verhält sich das Spektrum wie jenes freier Teilchen.

Da die Grundzustandsenergie E_0 korrigiert wurde erfährt auch das chemische Potential $\mu = \partial E_0(N)/\partial N$ eine kleine Änderung [Pit98]

$$\mu = g_{3D} n \left(1 + \frac{32}{3 \sqrt{\pi}} \sqrt{na_{3D}^3} \right). \quad (2.32)$$

In der Thomas-Fermi Näherung ist das lokale chemische Potential einfach $\mu_{TF}(r) = g_{3D} n(r)$ und das Dichteprofil somit eine umgekehrte Parabel. Mit der Bogoliubov-Korrektur erhält man in der hydrodynamischen Näherung (*Local-Density Approximation (LDA)*) eine leicht andere Form für die Dichte [Tim97, Pit03]

$$n(\mathbf{r}) = n_{TF}(\mathbf{r}) - \alpha n_{TF}^{3/2}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \alpha = 32/(3 \sqrt{\pi}) a_{3D}^{3/2}. \quad (2.33)$$

Dieser Effekt wird hier explizit erwähnt, weil wir in unserer Messung einen solchen Bogoliubov-Korrekturterm bestimmen, jedoch in der Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g_{3D}^{(3)}$ (Gleichung (4.11)). Für unsere Messmethode ist aber die Kenntnis des genauen Dichteprofiles des wechselwirkenden Kondensats erforderlich, weshalb man sich dessen Korrektur bewusst sein sollte.

2 Das ultrakalte Bosegas

Experimentell konnten Bogoliubov-Korrekturen bisher in einem Kondensat mit Hilfe eines optischen Gitters gemessen werden [Xu06]. Dabei wird die Stärke der Wechselwirkung und gleichzeitig die Dispersionsrelation des Systems über die Tiefe des Gitters variiert. In einem anderen, kürzlich durchgeführten Experiment wird der Korrekturterm in Gl.(2.30) untersucht, indem das in-situ Dichteprofil des Bosegases gemessen wird [Nav11].

KAPITEL 3

Das eindimensionale Bosegas

Eindimensionale Quantengase sind über fast 80 Jahre intensiv erforscht worden. Im Gegensatz zu dreidimensionalen Gasen können Wechselwirkungen meist deutlich einfacher modelliert werden, da sich weniger Teilchen gegenseitig beeinflussen. Einfache Systeme wechselwirkender Gase in einer Dimension (1D) können oftmals sogar exakt beschrieben werden und dienen als Referenz für komplexere Modelle.

So fand H. Bethe [Bet31] die exakte Lösung des 1D-Heisenberg Modells, also einer Spin $1/2$ -Kette mit einer *Nächster-Nachbar-Wechselwirkung*. Der nach ihm benannte Ansatz findet bis heute Anwendung in vielen eindimensionalen Problemen. Ein anderer wichtiger Schritt in der Beschreibung wechselwirkender Quantengase gelang E.H. Lieb und W. Liniger [Lie63b]. Sie betrachteten das mathematische Modell eindimensionaler Bosonen mit repulsiver Kontaktwechselwirkung und erhielten exakte Ausdrücke für die Grundzustandsenergie und das Anregungsspektrum. Des Weiteren fand F. Calogero [Cal71] die Lösung des N-Teilchen Problems für Bosonen mit inverser quadratischer Wechselwirkung.

In einer Verallgemeinerung des Lieb-Liniger Modells gelang es C.N. Yang und C.P. Yang [Yan69], thermodynamische Größen des wechselwirkenden Bosegases für beliebige Temperaturen zu berechnen, wobei die exakten Lösungen wiederum in einer Integralgleichung eingebettet sind. Die Analytizität der thermodynamischen Größen über den gesamten Temperaturbereich ist ein Indiz für die Nicht-Existenz von Phasenübergängen des Lieb-Liniger Gases [Wan99]. Da unsere Experimente aber meist nahe dem absoluten Nullpunkt durchgeführt werden, ist das Lieb-Liniger Modell für unsere Zwecke zumeist ausreichend.

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften des eindimensionalen Bosegases betrachtet. Dazu wird im ersten Teil das Lieb-Liniger-Modell herangezogen, welches über das Kontaktpotential wechselwirkende Bosonen im Grundzustand behandelt. Es ermöglicht die Berechnung von, für unsere Experimente, entscheidende Größen, wie Grundzustandsenergie, chemisches Potential, Anregungsspektren, Korrelationsfunktionen und Dichteprofile für einen zusätzlichen harmonischen Einschluss.

Im zweiten Teil wird die Brücke zwischen dem rein mathematischen Konstrukt des Lieb-Liniger Gases und unserem realen (Quasi-)1D-System geschlagen. Das Ergebnis ist eine effektive 1D-Beschreibung von Zwei-Körper Stößen in unserem System mit einer korrigierten 1D-Kopplungskonstante [Ols98].

Der letzte Teil dieses Kapitels befasst sich mit einer hydrodynamischen Beschreibung

3 Das eindimensionale Bosegas

des eindimensionalen Gases, der sogenannten *Luttinger-Flüssigkeit* (auch unter dem Begriff *Bosonisierung* bekannt). Diese bedient sich einer feldtheoretischen Methode, um sowohl wechselwirkende Bosonen als auch Fermionen in universeller Weise zu behandeln. Die systembeschreibenden Parameter, der Lieb-Liniger-Parameter γ und der Luttinger-Parameter K , dieser zwei verschiedenen Theorien können in Relation gebracht werden, was am Ende dieses Kapitels angeführt wird.

3.1 Das Lieb-Liniger Gas

Bereits 1963 betrachteten E. H. Lieb und W. Liniger das mathematische Modell eindimensionaler, repulsiv wechselwirkender Bosonen am absoluten Nullpunkt $T=0$ [Lie63b]. Die Eigenfunktionen und Eigenwerte dieses Vielteilchensystems können im Prinzip exakt berechnet werden. Die Energie des Grundzustandes ist in einer transzendenten Gleichung enthalten, die sich nur numerisch lösen lässt.

Der Hamilton Operator für dieses N -Teilchen System lautet

$$\hat{H}_{LL} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g_{1D} \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(x_i - x_j), \quad (3.1)$$

mit der Diracschen Deltafunktion $\delta(x)$, welche beim gleichzeitigen Aufenthalt zweier Teilchen am selben Ort divergiert und ansonsten verschwindet. Die 1D-Kopplungskonstante g_{1D} , welche die Stärke der Abstoßung zweier Teilchen beschreibt, ist in unserem 1D-System eine Funktion der s -Wellen-Streulänge und des radialen Einschlusses. In Kapitel 3.2 wird genauer auf diese (nicht triviale) Abhängigkeit eingegangen. Wir beschränken uns hier auf den repulsiven Fall, $g_{1D} \geq 0$.

Im speziellen betrachtet das Lieb-Liniger-Modell den thermodynamischen Grenzfall, d.h. für die Teilchenzahl und Kastenlänge gilt $N, L \rightarrow \infty$, und gleichzeitig gilt für die 1D-Dichte $n = \text{const}$. Die Energie des Grundzustandes kann aus Dimensionsgründen immer als

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} N n^2 A(N, cL) \quad (3.2)$$

geschrieben werden. Dabei ist $c = mg_{1D}/\hbar^2$ (mit Einheit m^{-1}) und $A(N, cL)$ eine dimensionslose Funktion. Da die Energie E_0 eine extensive Größe ist (dh. $E(\lambda N, \lambda L) = \lambda E(N, L)$), kann $A(N, cL)$ nur von intensiven Variablen abhängen, also $A(\lambda N, \lambda cL) = A(N, cL)$. Die einzige intensive, dimensionslose Variable in diesem Problem ist [Lie63b]

$$\gamma = cL/N = c/n = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2 n}, \quad (3.3)$$

und die Grundzustandsenergie wird dann durch Gl.(3.20) beschrieben. Das System ist also durch den sogenannten Lieb-Liniger Parameter γ charakterisiert. Anschaulich kann $\sqrt{\gamma}$ als das Verhältnis vom mittleren Teilchenabstand $1/n$ zur Korrelationslänge

(oder *Healing length*) $\xi = \hbar / \sqrt{mng_{1D}}$ interpretiert werden. Diese gibt in etwa die Distanz an, nach der die Wellenfunktion $\psi(x)$ von einem Randwert $\psi(0) = 0$ wieder ihren ursprünglichen Wert im Kondensat $\psi(0 + \xi) \approx \psi_0$ annimmt [Pit03]. Im Gegensatz zu einem 3D Bosegas, wird in 1D das stark korrelierte Regime für *abnehmende* Dichten erreicht. Diese 1D Besonderheit ist experimentell insofern vorteilhaft, als dass man keine hohen Dichten (wie in 3D) benötigt, um stark korrelierte Systeme zu erzeugen und somit störende Verlustprozesse durch Drei-Körper Stöße stark reduziert.

Ist die Änderung der Wellenfunktion auf Distanzen in der Größenordnung des Teilchenabstands viel kleiner als der Betrag der Wellenfunktion selbst, ist also $\xi \gg 1/n$ bzw. $\gamma \ll 1$, ist das 1D-Bosegas durch den *Mean-Field*-Ansatz der Gross-Pitaevskii-Gleichung ausreichend beschrieben. Übersteigt jedoch der mittlere Teilchenabstand die Korrelationslänge, also $\gamma \gg 1$, ist eine Beschreibung im Sinne einer *Mean-Field*-Theorie nicht mehr möglich. Dann spricht man vom sogenannten *Tonks-Girardeau*-Regime und andere theoretische Methoden sind notwendig, um dieses stark korrelierte System zu verstehen. Das *Tonks-Gas* zeichnet sich durch dessen fermionische Eigenschaften aus [Gir60]. Für die Wellenfunktion des Tonks-Gases ϕ_B und jener nicht-wechselwirkender Fermionen ϕ_F gilt

$$\phi_B(x_1, \dots, x_N) = |\phi_F(x_1, \dots, x_N)|.$$

Somit sind lokale Observablen des Tonks-Gases und des freien Fermigas identisch. Eine Ausnahme (weil nicht-lokal) ist z.B. die Impulsverteilung des Tonks-Gases, welche sich vom idealen Fermigas stark unterscheidet und nicht durch eine einfache Stufenfunktion dargestellt werden kann [Vai79, Ols98].

Für schwache Wechselwirkungen stimmen die Lieb-Liniger Lösungen gut mit den Ergebnissen der bis dahin bekannten Bogoliubov-Theorie ein. Ein grundlegender Unterschied ergibt sich jedoch im Anregungsspektrum: dort existieren zwei verschiedene Typen von Anregungen, während man störungstheoretisch nur einen erhält [Lie63a]. Dies wird in Teil (3.1.2) beschrieben.

3.1.1 Exakte Lösung des Grundzustandes

In unseren Experimenten mit dem eindimensionalen Bosegas wird zumeist das Lieb-Liniger-Modell (LL) [Lie63b] zur Beschreibung herangezogen. Deshalb möchte ich in diesem Teil die wesentlichen Ideen zu dessen Herleitung erläutern. Obwohl das LL-Modell ein homogenes System voraussetzt, kann es bei einem schwachen, longitudinalen Einschluss lokal angewendet werden. Auf den Effekt des harmonischen Einschlusses auf Eigenschaften des 1D-Bosegases, wie etwa auf das Dichteprofil, wird in Kapitel (3.2) genauer eingegangen werden.

Im Lieb-Liniger Modell sind N Teilchen auf einer Linie in einem Bereich R : $0 \leq x_i \leq L$ angeordnet (siehe Abb.(3.1)), und die Wellenfunktion erfüllt für alle räumlichen

3 Das eindimensionale Bosegas

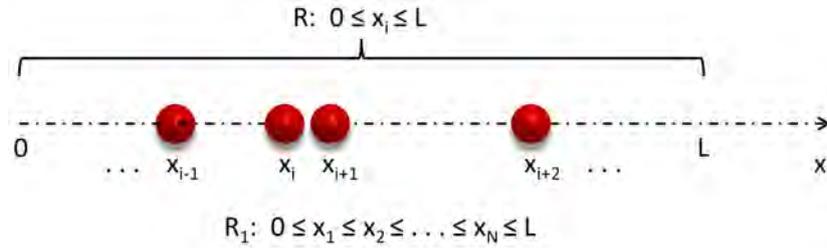


Abbildung 3.1: **Beschreibung von Bosonen in 1D:** die räumlichen Koordinaten der Teilchen im Kasten der Länge L beschränken sich auf den Bereich R . Aufgrund der Symmetrie der Wellenfunktion unter Teilchenaustausch ist es für Bosonen sinnvoll, einen Bereich R_1 zu definieren, welcher eine Ordnung der Teilchen impliziert. Dabei ist der Aufenthalt des i -ten Teilchens nur zwischen dem linken ($i-1$) und rechten ($i+1$) Nachbarn möglich. Dies ist nur in eindimensionaler Konfiguration möglich. Die Kenntnis der Wellenfunktion ψ im Bereich R_1 ist dann äquivalent der Kenntnis von ψ in R .

Koordinaten x_i die periodische Randbedingung

$$\psi(0, x_2, \dots, x_N) = \psi(L, x_2, \dots, x_N), \quad (3.4)$$

welche dem Fall einer ringförmigen Anordnung entspricht. Diese Einschränkung wird die Rechnungen wesentlich vereinfachen und ist für den thermodynamischen Grenzfall ($N, L \rightarrow \infty$) ausreichend.

Integriert man die Schrödingergleichung zu (3.1) zweier benachbarter Teilchen mit Koordinaten x_1 und x_2 in einem kleinen Bereich $(-\epsilon, +\epsilon)$ um den δ -Peak, dann folgt die Randbedingung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi|_{x_1=x_2+\epsilon} - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi|_{x_1=x_2-\epsilon} = 2c \psi|_{x_1=x_2}, \quad (3.5)$$

mit $c = mg_{1D}/\hbar^2$. Dies kann folgendermaßen interpretiert werden: Um Energieerhaltung zu gewährleisten, muss beim Aufeinandertreffen zweier Teilchen ($x_1 = x_2$) die kinetische Energie die Wechselwirkungsenergie $g_{1D}\psi(x_1 = x_2)$ kompensieren, da die lokale Gesamtenergie über das kleine Intervall $(-\epsilon, +\epsilon)$ verschwindet: $E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx \rightarrow 0$. Da die kinetische Energie im Intervall durch die Differenz der Ableitung der Wellenfunktion $-\hbar^2/2m[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)]$ gegeben ist, muss die Steigung folglich einen Sprung erfahren, dessen Betrag durch die rechte Seite von (3.5) gegeben ist.

Aufgrund der Symmetrie der bosonischen Wellenfunktion unter Teilchenaustausch

$$\psi(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = \psi(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots), \quad (3.6)$$

ist es möglich, einen neuen "geordneten" Bereich $R_1: 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq L$ zu definieren. Die Schrödingergleichung zu (3.1) vereinfacht sich in R_1 dann zu einer

Helmholtzgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \psi = E\psi, \quad (3.7)$$

mit der Randbedingung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi|_{x_{i+1}=x_i} = c \psi|_{x_i=x_{i+1}}. \quad (3.8)$$

Die rechte Seite der periodischen Randbedingung (3.4) ist nicht in R_1 enthalten, doch wegen der Symmetrie der Wellenfunktion

$$\psi(L, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_1, x_2, \dots, L). \quad (3.9)$$

lässt sich die periodische Randbedingung in R_1 entsprechend

$$\psi(0, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_2, x_3, \dots, L) \quad (3.10)$$

schreiben.

Da die Schrödingergleichung (3.7) jener freier Teilchen gleicht, erscheint ein Ansatz aus ebenen Wellen vernünftig. Bereits 1931 verwendete Bethe diesen Ansatz zur exakten Lösung des eindimensionalen Heisenbergmodells. Man definiert dabei einen Satz reeller Zahlen $\{k\} = k_1, \dots, k_N$ und erzeugt eine symmetrische Wellenfunktion

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_P a(P) \exp \left(i \sum_j^N k_{P(j)} x_j \right), \quad (3.11)$$

wobei man über alle Permutationen von $\{k\}$ summiert, gewichtet mit Amplituden $a(P)$. Die Energie aus (3.7) ergibt sich dann zu

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j^N k_j^2. \quad (3.12)$$

Die Koeffizienten $\{k\}$ bzw. $a(P)$ sind aus (3.7) und (3.8) und der periodischen Randbedingung durch ein System von N Gleichungen gegeben.

Im thermodynamischen Limes, wo $N, L \rightarrow \infty$ bei konstanter Dichte $n = N/L$, lässt sich die Summe über die Quasiimpulse $\{k\}$ durch ein Integral ersetzen. Für den Grundzustand gilt

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j^N k_j^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N}{n} \int_{-K}^K f(k) k^2 dk, \quad (3.13)$$

wobei man annimmt, dass $-K \leq k \leq K$. Dabei ist $Lf(k)dk$ die Anzahl der k 's im Intervall $(k, k+dk)$ und ist durch die Integralgleichung

3 Das eindimensionale Bosegas

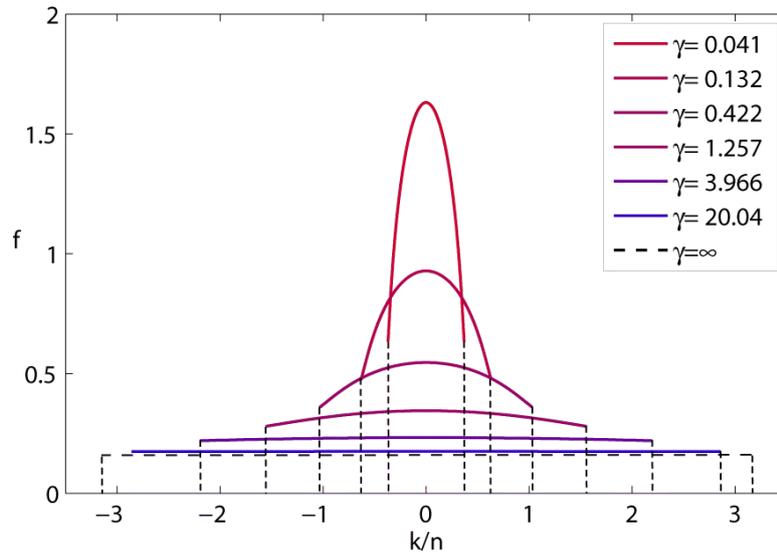


Abbildung 3.2: Verteilungsfunktion $f(k)$, numerisch berechnet, als Funktion des Quasi-Impulses für zunehmende γ (von oben nach unten). Die vertikalen Linien stellen den Impuls-Cutoff dar. Im Tonks-Girardeau Regime ($\gamma \rightarrow \infty$) geht $f(k)$ in die Fermiverteilung $f(k) = 1/2\pi$ über und $K/n = \pi$.

$$2c \int_{-K}^K \frac{f(q)}{c^2 + (q-k)^2} f(k) dq = 2\pi f(k) - 1 \quad (3.14)$$

definiert. Gleichzeitig ist $f(k)$ über die Dichte normiert

$$\int_{-K}^K f(k) dk = n. \quad (3.15)$$

Der Impuls-Cutoff K ist eine Funktion vom LL-Parameter $K(\gamma)$ und ergibt sich aus der Normierung (3.15).

Abb.(3.2) zeigt numerische Berechnungen der Quasi-Impuls-Verteilung für verschiedenen Stärken der Wechselwirkung. Im Grenzfall des Tonks-Gases gleicht die Verteilung jener des freien Fermigases derselben Dichte (im Gegensatz zur wahren Impuls-Verteilung des Tonks-Gases [Vai79]). Der Impuls-Cutoff K geht dann in den Fermiimpuls $p_F = \hbar\pi n$ über (zur Definition des Fermiimpuls siehe Kapitel (3.1.2)).

Durch Reskalierung der Variablen

$$k = Kx; \quad c = K\lambda; \quad f(Kx) = g(x), \quad (3.16)$$

erhält man aus 3.13, 3.14 und 3.15 folgende Integralgleichungen

$$1 + 2\lambda \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\lambda^2 + (x-y)^2} dx = 2\pi g(y), \quad (3.17)$$

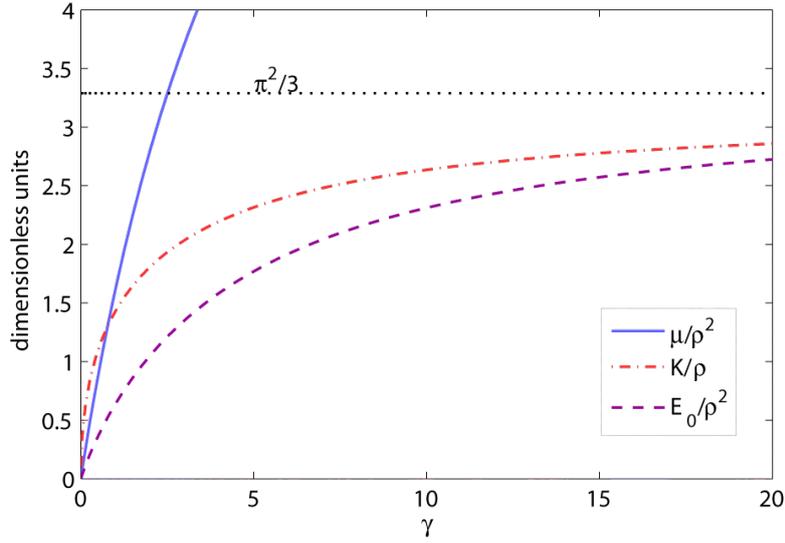


Abbildung 3.3: Wichtige thermodynamische Eigenschaften des Lieb-Liniger Gases als Funktion von γ ($\hbar^2/2m \equiv 1$). Numerisch berechnete Kurven für: μ = das chemische Potential, E_0/N = Energie pro Teilchen, K = Abschneide-Impuls. Im Tonks-Girardeau Regime ($\gamma \rightarrow \infty$) nimmt das System fermionische Eigenschaften an: $\mu \rightarrow (\pi n)^2$, $E_0/N \rightarrow (\pi n)^2/3$ und $K \rightarrow \pi n$

$$e(\gamma) = \frac{\gamma^3}{\lambda^3} \int_{-1}^1 g(x)x^2 dx, \quad (3.18)$$

$$\gamma \int_{-1}^1 g(x) dx = \lambda, \quad (3.19)$$

aus denen sich alle wichtigen Eigenschaften des Grundzustandes, wie Energie, chemisches Potential oder (Quasi-)Impulsverteilung, berechnen lassen. Die Funktion $e(\gamma)$ ist über die Energie des Grundzustandes definiert

$$\frac{E_0}{N} = \frac{\hbar^2}{2m} n^2 e(\gamma), \quad (3.20)$$

und das chemische Potential

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = \frac{\hbar^2}{2m} n^2 \left(3e(\gamma) - e(\gamma) \frac{\partial e(\gamma)}{\partial \gamma} \right). \quad (3.21)$$

In Abb.(3.3) sind die wichtigsten thermodynamischen Größen des LL-Modells als Funktion der Wechselwirkungsstärke aufgetragen, wie sie aus den LL-Gleichungen für beliebiges γ numerisch berechnet werden können. Wiederum gehen die Größen für unendlich starke Abstoßung in jene des freien Fermigases über.

3.1.2 Elementare Anregungen

Bisher wurden erst Eigenschaften des Grundzustands im thermodynamischen Gleichgewicht beschrieben. Aber um die Dynamik eines solchen Systems oder den Transport eines Fremdteilchens durch ein 1D-System zu beschreiben, ist das Verständnis des sogenannten Anregungsspektrums nötig.

Ein System im Gleichgewichtszustand kann nicht durch jede beliebige Kombination von Impuls- und Energiezufuhr (p, E) angeregt werden. Die gemäß Energie- und Impulserhaltung möglichen Anregungen sind im *Anregungsspektrum* $E(p)$ enthalten. Der einfachste Fall ist das parabolische Spektrum freier (klassischer) Teilchen der Masse m : $E(p) = p^2/2m$. Ein anderes prominentes Beispiel ist die Beschreibung eines schwach wechselwirkenden Kondensats mittels der Bogoliubov-Näherung: für kleine Anregungsimpulse ist das Spektrum im Gegensatz zum freien Gas linear, was eine Anregung von Schallwellen bedeutet. Zu unterscheiden vom Anregungsspektrum ist der *Strukturfaktor* $S(p, E)$, welcher die genaue Anregungsrate eines Gases in Abhängigkeit von zugeführter Energie E und Impuls p quantitativ angibt.

Der Fall freier Fermionen gibt ein einfaches Bild für mögliche Anregungen in 1D (vgl. Abb.3.4). Im Kasten der Länge L gibt die Randbedingung $\psi(0) = \psi(L) = 0$ die möglichen Impulse vor: $p_j = \hbar\pi j/L$, mit $j = 1, 2, \dots$. Bei N Fermionen im Grundzustand werden die Impulszustände dem Pauli-Prinzip folgend von $j = 1$ bis

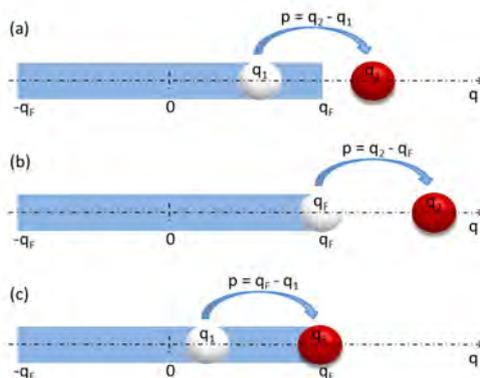


Abbildung 3.4: **Mögliche Anregungen im Fermisee (1D)**: dargestellt ist der Fermisee (blau gefülltes Rechteck), aus dem ein Teilchen (rote Scheibe) angeregt wird und ein Loch hinterlässt (weiße Scheibe). (a) Im Allgemeinen sind bei vorgegebenen Anregungsimpuls p viele verschiedene Anregungen möglich (Vernichtung eines Teilchens mit Impuls q_1 und Erzeugung eines Teilchens mit q_2). Die einzige Einschränkung gibt das Pauli-Prinzip (siehe Text). (b) Die maximale Anregungsenergie wird bei der Vernichtung eines Teilchens an der Fermikante erzielt, also $q_1 = p_F$. Die Energie ist dann $E = p(2p_F + p)/2m$. (c) Minimaler Energiegewinn: Vernichtung eines Teilchens so tief wie möglich im Fermisee und Erzeugung knapp über dem Fermiimpuls: $E = p(2p_F - p)/2m$.

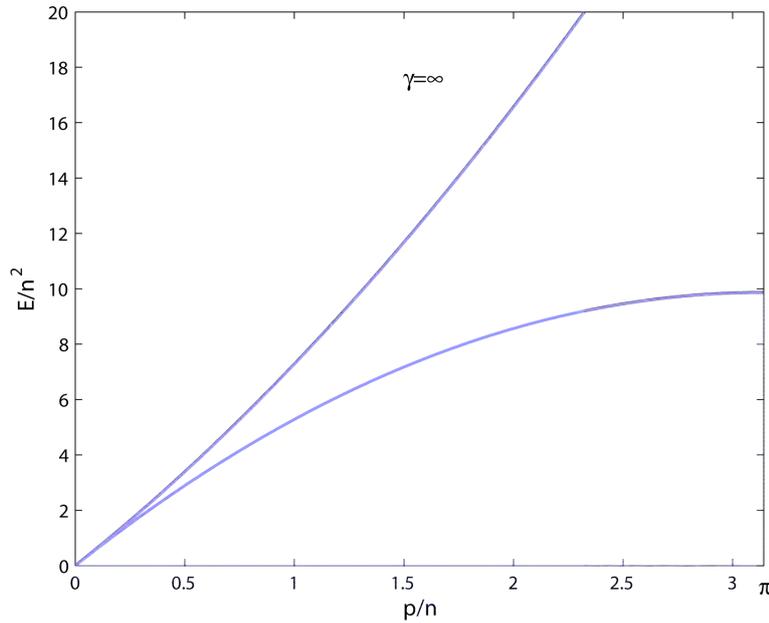


Abbildung 3.5: **Anregungsspektrum des Tonks-Gases** ($\hbar/2m = 1$) als Funktion des Anregungsimpulses p . Für die obere bzw. untere Schranke gilt $E = 2\pi n p + p^2/2m$ bzw. $E = 2\pi n p - p^2/2m$. Diese Ausdrücke sind mit jenen des freien 1D-Fermigases identisch.

$j = N$ aufgefüllt, also bis zum Fermiimpuls $p_F = \hbar\pi N/L = \hbar\pi n$, mit der Dichte $n = N/L$. Die Fermienergie ist entsprechend $E_F = p_F^2/2m$.

Einer Anregung entspricht die Vernichtung eines Teilchens im Fermisee mit Impuls $q_1 < p_F$, und die Erzeugung eines Teilchens über der Fermikante, $q_2 > p_F$. Aufgrund des Pauli-Prinzips ist dies nicht für beliebige Anregungsimpulse p möglich. So kann beispielsweise ein Teilchen mit $q_1 = 0$ nicht mit $p < p_F$ angeregt werden. Dies ist auch in 2D (oder 3D) der Fall. Die Besonderheit in 1D ist jedoch, dass die untere Schranke des Anregungsspektrum für Impulse $0 < p < p_F$ von Null verschieden ist. Diese ergibt sich aus Abb.3.4(c) zu

$$E_<(p) = \frac{p(2p_F - p)}{2m}. \quad (3.22)$$

Im Gegensatz dazu ist es in 2D und 3D für Impulse $0 < p < p_F$ stets möglich ein Teilchen auf der Fermikante zu vernichten und woanders knapp über der Fermikante zu erzeugen, was sich aus einfacher geometrischer Überlegung ergibt. Dann folgt eine Energiedifferenz von $E(p) = 0 + \mathcal{O}(1/L)$, welche für hinreichend große Systeme verschwindet [Gia04].

Die obere Schranke des 1D (sowie des 2D und 3D) Fermigases ist

$$E_>(p) = \frac{p(2p_F + p)}{2m}. \quad (3.23)$$

Für das freie Fermigas kann das Spektrum also in geschlossener Form angegeben wer-

3 Das eindimensionale Bosegas

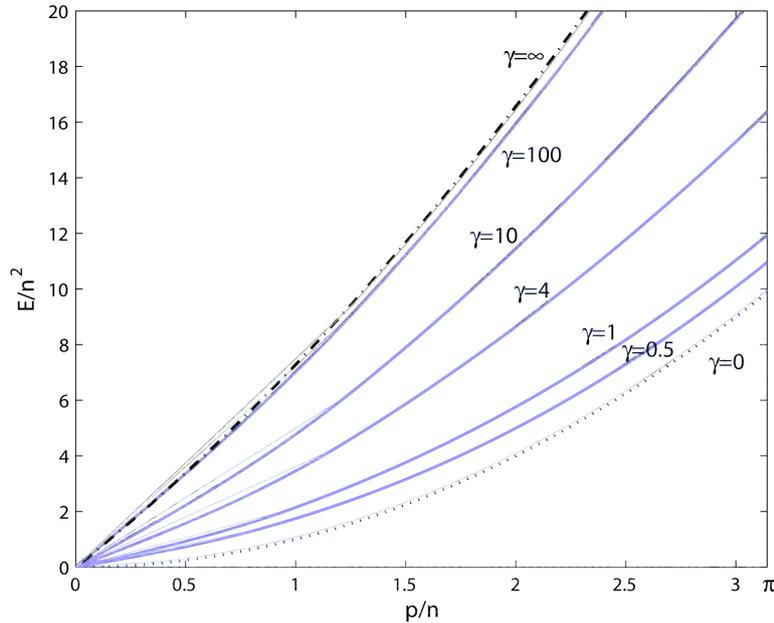


Abbildung 3.6: **Obere Schranke des Anregungsspektrums** als Funktion des Anregungsimpulses p , numerisch berechnet für verschiedene γ ($\hbar/2m = 1$). Für $\gamma = 0$ gilt $E = p^2/2m$, und für $\gamma = \infty$ wird $E = 2\pi n p + p^2/2m$.

den. Dasselbe gilt für das nicht wechselwirkende Bosegas ($\gamma = 0$) für welches man die Dispersionsrelation freier Teilchen erhält $E(p) = p^2/2m$ (siehe Abb.3.6).

Lieb und Liniger berechneten exakte Ausdrücke für das Spektrum, wiederum gegeben durch Integralgleichungen, die numerisch berechnet werden können [Lie63a]. Tatsächlich hat im Tonks-Gas die unendlich starke deltaförmige Abstoßung zwischen den Teilchen denselben Effekt auf das Anregungsspektrums, wie das Pauli-Prinzip auf das Anregungsspektrum im Fermigas. Im allgemeinen Fall des LL-Gases definieren die untere und obere Schranke des Spektrums den Bereich möglicher Anregungen, dessen Größe und Form allein durch den LL-Parameter γ bestimmt wird.

Abb.(3.6 und 3.7) zeigen numerisch erhaltene Kurven der unteren und oberen Schranken des Anregungsspektrums für verschiedene γ -Parameter. Die numerisch berechneten Kurven gehen dabei für die Grenzfälle $\gamma = 0$ bzw. $\gamma = \infty$ in die analytischen Formeln (3.22),(3.23) bzw. in die Dispersionsrelation freier Teilchen über.

Für kleine Anregungen ist das Spektrum linear $E(p) = v_s p$, mit der Schallgeschwindigkeit [Lie63a]

$$v_s = 2 \left(\mu(\gamma) - \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} \right)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Die wichtige Methode der sogenannten *Bosonisierung* beruht auf der Tatsache, dass das Spektrum eines eindimensionalen Gases freier Fermionen bei niedrigen Energi-

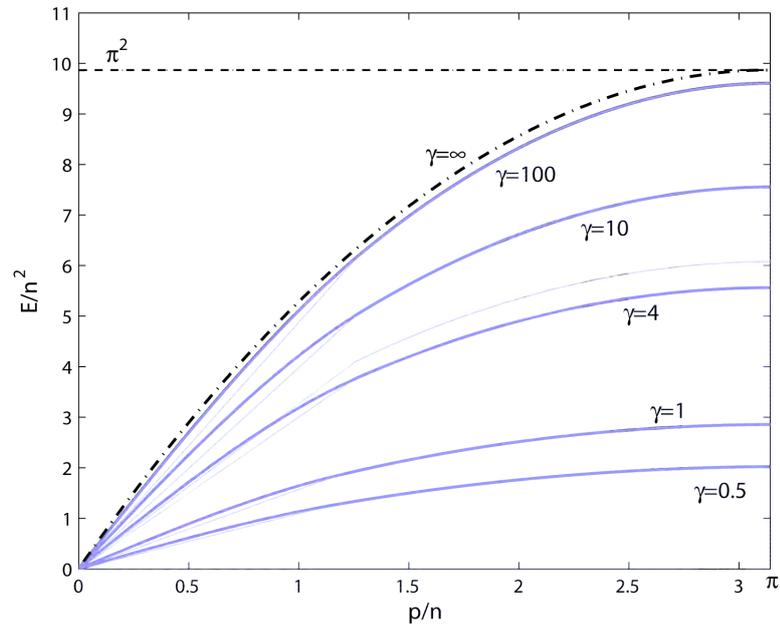


Abbildung 3.7: **Untere Schranke des Anregungsspektrums** als Funktion des Anregungsimpulses p , numerisch berechnet für verschiedene γ ($\hbar/2m = 1$). Für $\gamma = \infty$ wird $E = 2\pi n p - p^2/2m$.

en linear und genau definiert ist (im Gegensatz zu einem 3D-Fermigas), und deshalb der Hamilton-Operator in Form von bosonischen *Anregungsoperatoren* diagonalisiert werden kann. Später, in Kapitel (3.3), wird dies genauer erläutert.

3.1.3 Numerische Lösung der Lieb-Liniger Integralgleichungen

Leider ist es nicht möglich, das transzendente Gleichungssystem (3.17), (3.18) und (3.19) analytisch zu lösen. Dieses kann aber numerisch berechnet werden [Lie63b]. Folgende Schritte sind dazu nötig:

1. Man wählt ein beliebiges λ und löst Gleichung (3.17) numerisch. Man kann beweisen, dass es exakt eine Lösung $g(x)$ gibt, welche (3.17) erfüllt.
2. Aus (3.19) lässt sich λ als Funktion von γ berechnen
3. Am Ende erhält man aus (3.18) die Funktion $e(\gamma)$

Die Funktion $g(x)$ wird folgendermaßen berechnet: man löst die Integralgleichung (3.17), indem die Simpsonregel [Atk89] auf das Integral an $2n+1$ diskreten Stellen

$$x_i = -1 + (i-1)\Delta x; \quad \Delta x = 1/n; \quad i = 1, \dots, 2n+1 \quad (3.25)$$

angewendet wird. Dabei erhält man ein System $(2n+1)$ linearer Gleichungen

$$\left(\mathbb{1} - \frac{\lambda \Delta x}{3\pi} \hat{M} \right) \begin{pmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{2n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

mit der $(2n+1) \times (2n+1)$ Matrix

$$\hat{M}_{ij} = \frac{1}{\lambda^2 + (x_i - x_j)^2} \hat{A}_{ij}, \quad (3.27)$$

und der Matrix

$$\hat{A}_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j = 1, 2n+1 \\ 2, & i = j = 3, 5, \dots, 2n-1 \\ 4, & i = j = 2, 4, \dots, 2n \end{cases}$$

Das Gleichungssystem wurde mit MATLAB berechnet.

3.2 Das „quasi“-eindimensionale Bosegas

Ein eindimensionales Gas scheint in unserer dreidimensionalen Welt a priori unrealistisch. Zum einen sind Atome selbst dreidimensionale Objekte, und zum anderen kann ein Streuprozess zwischen zwei Teilchen stets in beliebige Raumrichtungen erfolgen. Die Gesetze der Quantenmechanik erlauben es jedoch unter besonderen Umständen, die Bewegung effektiv auf eine Dimension zu beschränken. Eine Kollision zweier Teilchen hat dann keine auslaufende Kugelwelle zur Folge, sondern eine Reflektion oder Transmission.

M. Olshanii fand genau diese Eigenschaften für ein ultrakaltes Gas deltawechselwirkender Bosonen in einer zylindersymmetrischen Falle, welches radial durch ein starkes harmonisches Potential mit Fallenfrequenz ω_{\perp} gefangen wird, während axial (z-Achse) die Bewegung frei ist bzw. nur in einem viel schwächeren Potential ω_z erfolgt [Ols98].

Der Hamilton-Operator für N Teilchen ist zunächst

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega_z^2 z_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x_i^2 + y_i^2) + g_{3D} \delta(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot), \quad (3.28)$$

mit der Kopplungsstärke $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a_{3D}/m$ und der s-Wellen Streulänge a_{3D} .

Wenn weder die Temperatur noch die Energie pro Teilchen die transversale Fallenfrequenz übersteigt, also

$$k_B T < \hbar \omega_{\perp}, \quad (3.29)$$

$$\frac{E_0}{N} < \hbar \omega_{\perp}, \quad (3.30)$$

dann besetzen bei einem Streuprozess sowohl das einfallende als auch das auslaufende Teilchen den transversalen Grundzustand, mit der asymptotischen Wellenfunktion der Form

$$\psi(x, y, z) = \phi_{00}(x, y) e^{ikz}. \quad (3.31)$$

Die Teilchen bewegen sich in z- Richtung also frei. Die Wellenfunktion des transversalen gaußschen Grundzustandes ($n_x, n_y = 0$) ist

$$\phi_{00}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{\perp}}} e^{-(x^2+y^2)/2a_{\perp}^2}, \quad (3.32)$$

mit der harmonischen Oszillator- Länge $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$.

Das System wird effektiv eindimensional und (3.28) vereinfacht sich zu

$$\hat{H}_{1D} = \hat{H}_{LL} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega_z^2 z_i^2, \quad (3.33)$$

3 Das eindimensionale Bosegas

mit \hat{H}_{LL} dem Lieb-Liniger Hamilton-Operator (3.1)

$$\hat{H}_{LL} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \sum_{\langle i,j \rangle} g_{1D} \delta(z_i - z_j). \quad (3.34)$$

Man beachte dabei, dass die dreidimensionale Kopplungskonstante g_{3D} durch die Eindimensionale g_{1D} ersetzt wird, welche die Information des transversalen Einschlusses beinhaltet und geschrieben werden kann als

$$g_{1D}^{(3)} = 2\hbar\omega_{\perp} a_{3D} \left(1 - C \frac{a_{3D}}{a_{\perp}}\right)^{-1}, \quad (3.35)$$

mit der Konstante $C = |\zeta(1/2)|(\sqrt{2}) = 1.0326$ und $\zeta(\dots)$ der Riemann-Zeta Funktion [Ols98, Ber03]. Im Grenzfall kleiner Streulängen $a_{3D} \ll a_{\perp}$ erhält man den ersten Term von (3.35), wenn man die 3D- Wechselwirkungsenergie über das radiale Dichteprofil $n(x, y) = |\phi_{00}(x, y)|^2$ mittelt [Pet07]:

$$g_{1D}^{(3)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g_{3D} n(x, y)^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} n(x, y)} = 2\hbar\omega_{\perp} a_{3D}. \quad (3.36)$$

Für zunehmende Streulängen gewinnt der Korrekturterm $C(a_{3D}/a_{\perp})$ an Bedeutung, welcher aus der Berücksichtigung virtueller Anregungen in höhere transversale Eigenzustände während des Stoßprozesses herrührt. Die Stärke der Wechselwirkung divergiert wenn $a_{3D} \rightarrow a_{\perp}/C$, im Gegensatz zum 3D- Gas, wo die Resonanz von g_{3D} bei $a_{3D} \rightarrow \infty$ auftritt. Experimentell konnten diese sogenannten *Einschluss-induzierten Resonanzen* für Bosonen [Hal10b] nachgewiesen werden.

3.2.1 Dichteprofile in quasi 1D

Im Gegensatz zum freien Lieb-Liniger Gas kann die Schrödingergleichung zu (3.33) nicht exakt gelöst werden. Mit Hilfe der sogenannten *hydrodynamischen Näherung (Local Density Approximation, LDA)* lassen sich jedoch Eigenschaften wie das Dichteprofil oder Oszillationsfrequenzen des eindimensionalen Bosegas im harmonischen Einschluss berechnen [Dun01, Men02]. Die LDA gilt für hinreichend viele Teilchen und ist nur für Observablen geeignet, welche sich auf Distanzen ändern, die viel größer als der mittlere Teilchenabstand sind. Daher wird diese Methode nicht nur für das schwach wechselwirkende Gas im Mean-Field Bereich herangezogen sondern auch im stark wechselwirkenden Tonks-Girardeau Regime.

Im Gleichgewichtszustand ist das lokale chemische Potential $\mu_{loc}(n(z))$ am Ort z durch die lokale Dichte $n(z)$ des freien Gases bestimmt, und erfüllt gleichzeitig die Gleichung

$$\mu_{loc}(n(z)) + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 = \mu, \quad (3.37)$$

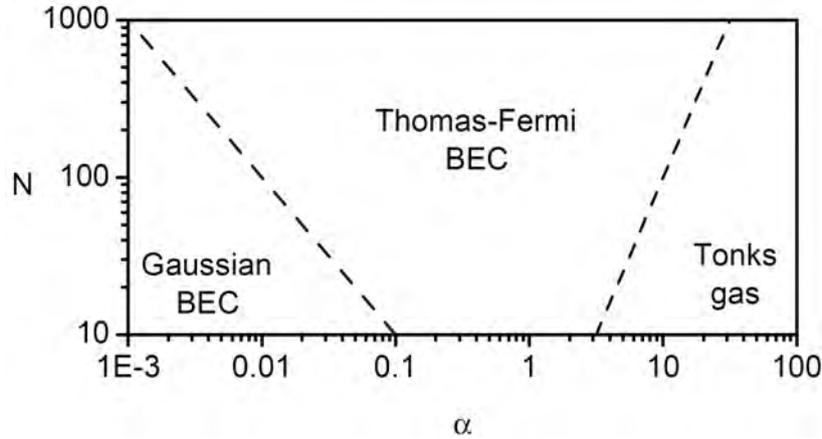


Abbildung 3.8: Zustandsdiagramm für das eindimensionale Bosegas in Abhängigkeit von der Atomanzahl N und dem dimensionslosen Parameter $\alpha = mga_z/\hbar^2$, mit der longitudinalen Oszillatorlänge $a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$. Abb. aus [Pet07].

mit dem globalen chemischen Potential μ , welches durch die Gesamtzahl der Teilchen N fixiert wird.

Das Dichteprofil kann also für beliebige Wechselwirkungsstärken g_{1D} durch die Berechnung des chemischen Potentials $\mu(n)$ aus den Lieb-Liniger Gleichungen, und Gleichung 3.37 erfüllend, numerisch berechnet werden (siehe Abb.(3.9)). Der Matlab-Code dazu ist in Anhang (B.2) angeführt.

Im (annähernd) idealen Gas kann aufgrund fehlender Wechselwirkung kein lokales Gleichgewicht erreicht werden und eine hydrodynamische Beschreibung ist dort nicht möglich. Das Dichteprofil ist dann (annähernd) durch den gaußschen Grundzustand gegeben. Für N nicht wechselwirkende Bosonen gilt also

$$n(z) = N|\psi_0(z)|^2, \quad \psi_0(z) = \sqrt{\frac{m\omega_z}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_z}\right)^2\right), \quad (3.38)$$

mit der Breite des Grundzustandes $a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$.

Im Thomas-Fermi Regime, in welchem das chemische Potential $\mu \ll \hbar\omega_z$, kann der kinetische Term der 1D- Gross-Pitaevskii-Gleichung (GP)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(z,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + g_{1D}|\psi(z,t)|^2\right)\psi(z,t) \quad (3.39)$$

vernachlässigt werden. Im Gleichgewicht ist die zeitliche Entwicklung der kondensierten Wellenfunktion durch $\psi(t) = \exp(-i\mu t/\hbar)$ gegeben und man erhält die parabolische Thomas-Fermi-Verteilung

3 Das eindimensionale Bosegas

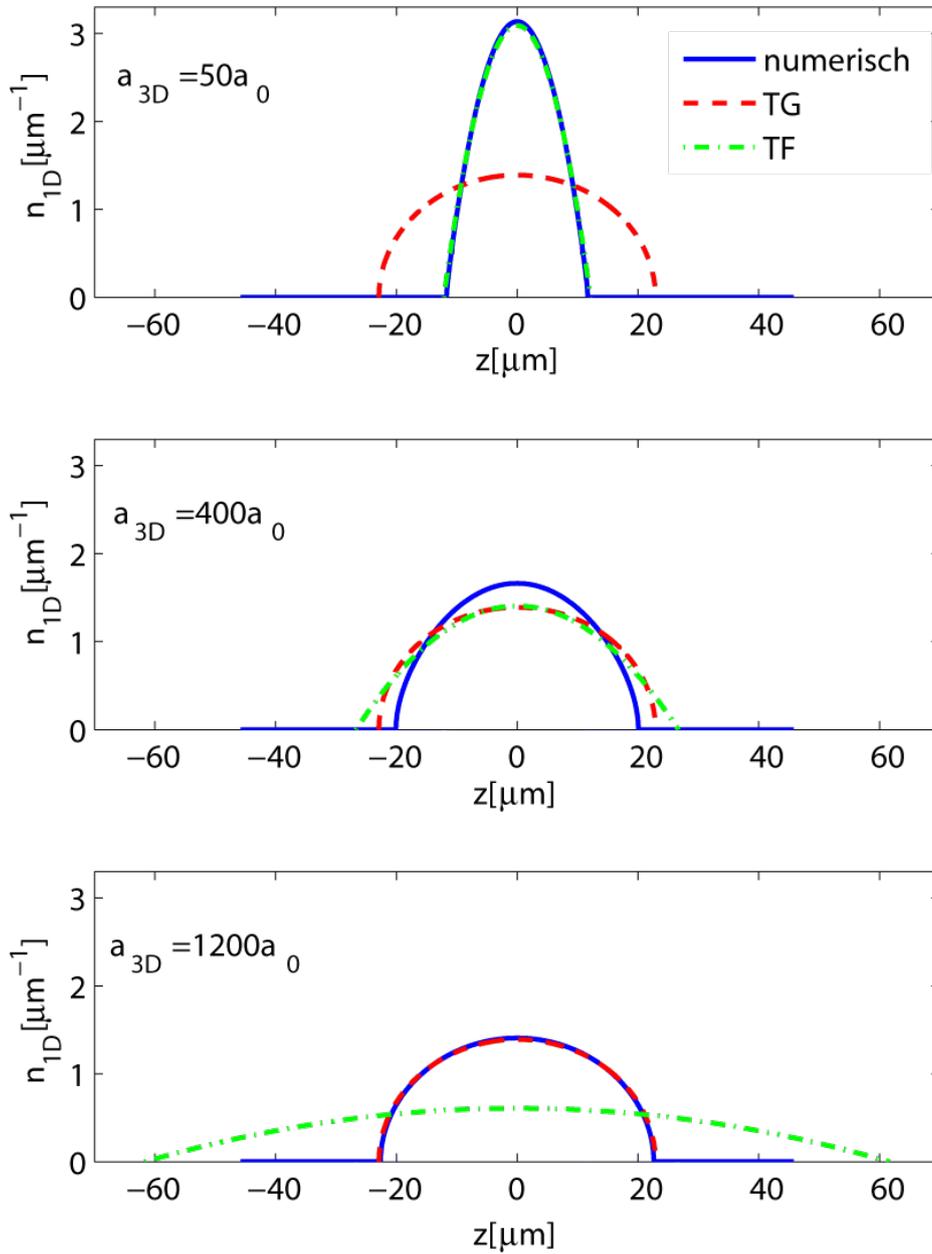


Abbildung 3.9: **1D Dichteprofile:** Vergleich der verschiedenen Dichteverteilungen für 50 Atome, bei longitudinaler Fallenfrequenz $\omega_z = 2\pi \times 14.5\text{Hz}$ und radialen Einschluss $\omega_\perp = 2\pi \times 12000\text{Hz}$, bei verschiedenen Streulängen a_{3D} . Aufgetragen ist jeweils Thomas-Fermi (strichpunktirt), Tonks-Girardeau (strichliert) und numerisch berechnetes Profil (durchgezogene Linie). $a_{3D} = 50a_0$: Thomas-Fermi Regime. $a_{3D} = 400a_0$: Zwischenbereich. $a_{3D} = 1200a_0$: Tonks-Girardeau Regime.

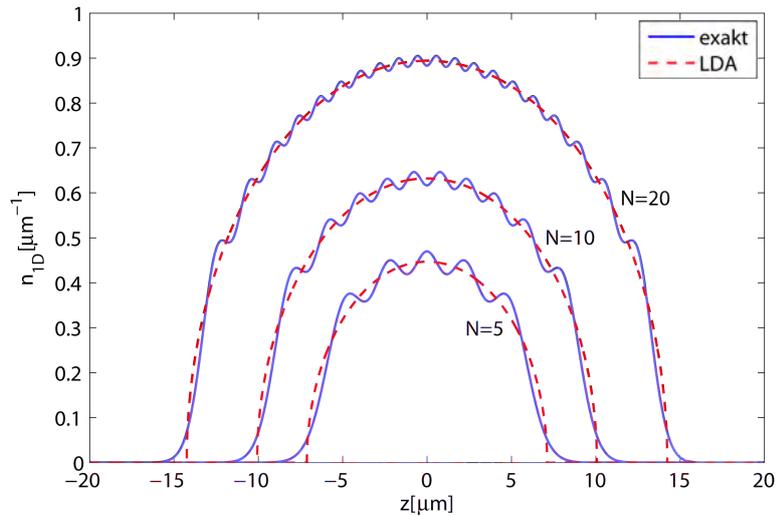


Abbildung 3.10: **Dichteprofil des Tonks-Gases** für $N = 5, 10$ und 20 Teilchen bei einer Fallenfrequenz von $\omega_z = 2\pi \times 15\text{Hz}$. Es entspricht jenem N nicht-wechselwirkender Fermionen (durchgezogene Linien). Für ein großes Ensemble von Atomen stellt die *Local Density Approximation (LDA)* eine gute Näherung dar (strichliert).

$$n_{TF}(z) = n_{TF}^0 \left(1 - \frac{z^2}{Z_{TF}^2} \right). \quad (3.40)$$

Außerhalb des Thomas-Fermi-Radius $Z_{TF} = \sqrt{2\mu/m\omega_z^2}$, welcher die Größe des Kondensates angibt, verschwindet die Dichte. Das zentrale Dichtemaximum ist $n_{TF}^0 = \mu/g_{1D}$ mit μ , dem chemischen Potential, welches sich durch die Normierungsbedingung $\int n(z)dz = N$ zu

$$\mu = \left(\frac{3Ng_{1D}\omega_z \sqrt{m}}{4\sqrt{2}} \right)^{2/3} \quad (3.41)$$

ergibt [Men02].

Bei zunehmender Abstoßung verbreitet (und verflacht) sich das Kondensat, wie auch in Abb.(3.9) zu sehen ist.

Der Wechselwirkungsbereich zwischen nicht-wechselwirkenden Teilchen und Thomas-Fermi-Regime kann durch numerische Lösung der GP-Gleichung (3.39) abgedeckt werden. Dies kann durch eine *Split Step Fourier Methode* realisiert werden, welche den Grundzustand des Kondensates mit Hilfe eines imaginären (nicht unitären) Zeitentwicklungsoperators herausfiltert. Eine genauere Beschreibung und der dazugehörige Matlabcode ist in [Mar07b] zu finden.

Der andere wichtige Grenzfall, $\gamma \gg 1$, ist jener des Tonks-Girardeau Gases. Hier ergibt

3 Das eindimensionale Bosegas

sich aus der LDA folgender Ausdruck für die Dichte

$$n_{TG}(z) = n_{TG}^0 \left(1 - \frac{z^2}{Z_{TG}^2}\right)^{1/2}, \quad (3.42)$$

mit der zentralen Dichte $n_{TG}^0 = \sqrt{2N}/\pi a_z$, und dem Tonks-Girardeau-Radius $Z_{TG} = \sqrt{2N}a_z$ [Men02].

Hier kommt die Äquivalenz zwischen stark deltawechselwirkenden Bosonen und nicht-wechselwirkenden (spin-polarisierter) Fermionen zur Geltung: Es ist einfach zu zeigen, dass sich die Dichte $n_F(z)$ von N Fermionen im harmonischen Potential als Summe der quadrierten Ein-Teilchen Eigenfunktionen schreiben lässt [Ast04]

$$n_F(z) = n_{TG}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_z} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k k!} H_k^2(z/a_z) \exp\left(-\frac{z^2}{a_z^2}\right), \quad (3.43)$$

wobei H_k die bekannten Hermite-Polynome darstellen. Wie aus Abb.(3.10) hervorgeht, nähert sich (3.43) für zunehmende Teilchenzahlen immer besser an die Lösung der LDA (3.42) an. Man sieht auch, dass in der LDA (Quanten)-Fluktuationen nicht enthalten sind.

3.3 Bosonisierung

In Anlehnung an Landaus *Fermi-Liquid*-Theorie [Lan57b], welche höherdimensionale fermionische Systeme bei niedrigen Temperaturen beschreibt, fasste erstmals Haldane [Hal81] eine ganze Klasse von 1D Systemen in den sogenannten *Tomonaga-Luttinger Liquids* (oder nur *Luttinger-Liquids*) zusammen [Tom50, Lut63]. Die zugrundeliegende Methode ist eine feldtheoretische Beschreibung, genannt *Bosonisierung*, mit der gleichzeitig die Physik von Fermionen als auch Bosonen modelliert werden kann, welche über beliebige (kurzreichweitige) Zwei-Körper-Potentiale wechselwirken.

Der Zusammenbruch der *Fermi-Liquid*-Theorie in 1D und gleichzeitig die Möglichkeit einer anderen, universellen Niedrig-Energie Beschreibung, unabhängig von Quantenstatistik und Wechselwirkung der beteiligten Teilchen, liegt unter anderem an dem besonderen Verhalten eindimensionaler Systeme unter Anregung. Denn das Anregungsspektrum unterscheidet sich grundsätzlich von jenem mehrdimensionaler Systeme (vgl. Abschnitt(3.1.2)), und spielt in diesem Kapitel eine wesentliche Rolle.



Abbildung 3.11: **(links)** Im 3D Gas sind einzelne Quasiteilchen-Anregungen meist möglich. Die Masse des Quasiteilchens wird durch die Art und Stärke der Wechselwirkung bestimmt. **(rechts)** In 1D kann sich ein wechselwirkendes Teilchen nicht fortbewegen ohne alle anderen vor sich herzuschieben. Anregungen sind daher immer kollektiv.

Die Stärken der Luttinger-Theorie liegen zum einen darin, dass sie keine *Mean-Field*-Theorie ist, und deshalb weder Symmetrien bricht noch über Quantenfluktuationen mittelt. Zum anderen beschreibt sie schwach bzw. stark wechselwirkende Fermionen und Bosonen in einem Zug, während sich Unterschiede erst im Abfall räumlicher Korrelationsfunktionen äußern. Der Hamilton-Operator der wechselwirkenden fermionischen (oder bosonischen) Teilchen wird dabei in einen freien Hamilton-Operator neu eingeführter, bosonischer Feldoperatoren umgewandelt, und das System ist dann (wie später angeführt) durch nur zwei phänomenologische Parameter (*Luttinger-Parameter* und *Schallgeschwindigkeit*) ausreichend beschrieben. Diese können mit anderen 1D-Modellen (in unserem Fall dem Lieb-Liniger-Modell) über thermodynamische Eigenschaften verknüpft werden.

Fermi Liquid Theorie

Die elegante Beschreibung mehrdimensionaler, wechselwirkender Fermigase durch die *Fermi Liquid* Theorie funktioniert über die Idee der Ein-Teilchen Anregung in Form von Quasiteilchen [Lan57a, Lan57b, Lan59]. Letztere verhalten sich wie freie Teilchen, mit dem Unterschied, dass sie von Dichtefluktuationen umhüllt sind, welche aus den *Teilchen-Loch* Anregungen in der Nähe der Fermikante herrühren. Dies spiegelt sich in einer renormalisierten Masse der Quasiteilchen wider.

Quasiteilchen stellen nicht die exakten Eigenfunktionen des wechselwirkenden Systems dar, sondern sind störungstheoretischen Charakters. Die Eigenwerte E_i des ungestörten Systems sind meistens bekannt. Wird die Stärke der Wechselwirkung erhöht, werden sich die Eigenenergien zunehmend in viele exakte (aber zumeist unbekannt) Eigenzustände im Intervall $[E_i - \Delta E_i/2, E_i + \Delta E_i/2]$ aufzähnen. Das Quasiteilchen kann dann als Mittelwert über alle exakten Eigenwerte in diesem Intervall betrachtet werden, mit einer endlichen Lebensdauer $\tau \sim \Delta E_i^{-1}$. Diese ist in der Regel viel größer als die typische Zeitskalen des Systems, gegeben etwa durch die Fermienergie $\tau \gg E_F^{-1}$, und eine Quasiteilchen Beschreibung ist somit sinnvoll.

Tomonaga-Luttinger Liquid Theorie

In wechselwirkenden 1D Gasen sind nur kollektive Anregungen möglich (vgl. Abb.(3.11)). Das ist der grundlegende Unterschied zu einem mehrdimensionalen Gas und macht eine Quasiteilchen Beschreibung im Rahmen der *Fermi-Liquid*-Theorie unmöglich. Thermische und Quanten-Fluktuationen über Distanzen im Bereich der Systemgröße treten in 1D verstärkt auf, weshalb es nahe liegt kollektive Feldoperatoren zu verwenden, welche Dichte- und Phasenfluktuationen bei niedrigen Temperaturen beschreiben können.

Im Folgenden wird in sehr gekürzter Form die zentrale Idee der Bosonisierung erläutert. Eine ausführliche Herleitung ist in [Hal81, Caz04, Gia04] zu finden. Man definiert bosonische Feldoperatoren, mit der Kommutatorrelation $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')] = \delta(x - x')$. Die Konstruktion fermionischer Operatoren kann später durch eine (die fermionsiche Vertauschungsregeln beachtende) Transformation erfolgen. In zweiter Quantisierung schreibt sich der bosonische Feldoperator

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sqrt{\hat{\rho}(x)} e^{-i\hat{\phi}(x)}.$$

Die Dichte $\hat{\rho}(x) = \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)$ und die Phase $\hat{\phi}(x)$ erfüllen die bosonische Kommutatorrelation

$$[\hat{\rho}(x), \hat{\phi}(x')] = i\delta(x - x').$$

Abb.(3.12) zeigt das Anregungsspektrum des Tonks-Gas (bzw. feien Fermigases). Es ist hilfreich sich diesen Spezialfall vor Augen zu halten, um ein anschauliches Bild von der Idee der Bosonisierung zu bekommen. Man sieht, dass es zwei Arten von

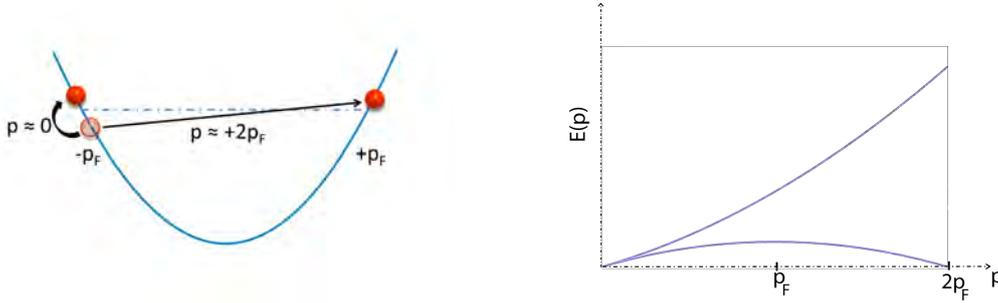


Abbildung 3.12: **(links)** Dispersionsrelation des freien Fermigas: die blau strichlierte Linie ist die Fermienergie. Niedrig-Energie Anregungen ($\Delta E \approx 0$) sind auf zwei verschiedene Arten möglich: (i) Anregung mit Impuls $p \approx 0$ unter der Fermikante knapp über dieselbe Kante. (ii) Anregung eines Teilchens mit einem Impuls $p \approx 2p_F$ von einer Seite auf die gegenüberliegende. **(rechts)** Das Anregungsspektrum für das Fermigas (bzw. Tonks-Gas): erlaubte Anregungen liegen im Zwischenbereich der beiden Kurven. Für kleine Impulse ist das Spektrum linear mit wohl definierten Impuls und Energie.

Niedrig-Energie-Anregungen gibt ($\Delta E \approx 0$): Die Anregung mit kleinem Impulsübertrag ($p \approx 0$) resultiert in Dichtefluktuationen $\Pi(x)$ großer Wellenlänge. Man schreibt die Dichte daher als $\rho(x) = \rho_0 + \Pi(x)$, mit der konstanten Dichte ρ_0 . Die andere Möglichkeit ein Teilchen anzuregen ($p \approx 2p_F$) gibt Fluktuationen kleiner Wellenlänge mit $\sim \cos(2p_F x)$. Der Fermiimpuls ist in 1D einfach $p_F = \pi n$ ($\hbar = 1$). Die zwei Anregungsarten sind aber korreliert, da die langwelligen Dichtefluktuationen den lokalen Fermiimpuls $p_F(x) = \pi(\rho_0 + \Pi(x))$ räumlich variieren und somit wird die kurzwellige Fluktuation $\cos 2 \int^x p_F(x') dx' = \cos 2\theta(x)$, mit dem neu eingeführten Feld

$$\frac{1}{\pi} \partial_x \theta(x) = \rho_0 + \Pi(x).$$

Die Funktion $\theta(x)$ ist eine monoton steigende Funktion und für den Fall keiner langwelligen Fluktuationen ($\Pi(x) = 0$) ist sie einfach eine Gerade $\theta(x) = \theta_0 + p_F x$. Die Teilchenzahlnormierung $\int_0^L \rho(x) dx = N$ ergibt $\theta(L) - \theta(0) = \pi N$. Es liegt daher nahe die Lokalisation eines Teilchens mit einem Sprung (oder Knick) von $\theta(x)$ um den Wert π zu assoziieren, wie aus Abb.3.13 hervorgeht.

Mit θ kann die Dichte auf folgende Weise geschrieben werden

$$\rho(x) = (\rho_0 + \Pi(x)) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2im\theta(x)}.$$

Der $m = 0$ Teil der Summe beschreibt die langwellige Dichteschwankung $\rho_0 + \Pi(x)$, während die kurzwelligen Fluktuationen durch höhere Terme zustande kommen: $m = \pm 1$ entsprechen den Übergängen in Abb.(3.12) von links nach rechts (bzw. umgekehrt), $m = \pm 2$ entsprechen denselben Anregungen mit zwei Teilchen, usw.

3 Das eindimensionale Bosegas

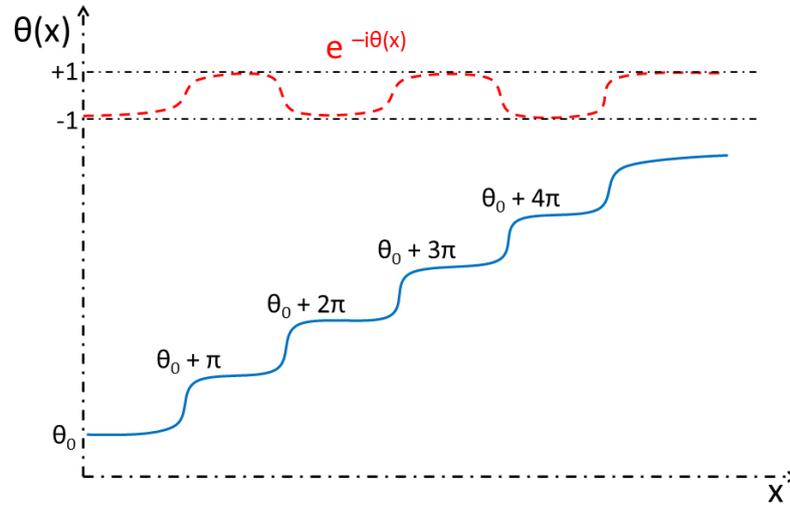


Abbildung 3.13: **Verhalten der Funktion $\theta(x)$** : an der Stelle eines Teilchens macht $\theta(x)$ einen Sprung um π . Deshalb oszilliert $e^{-i\theta(x)}$ zwischen 1 und -1 .

Der bosonische Feldoperator ist dann

$$\hat{\psi}^\dagger(x) \sim \sqrt{\rho_0 + \Pi(x)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2m\theta(x)} e^{-i\phi(x)}.$$

Indem man sich des Verhaltens von $\theta(x)$ erinnert (siehe Abb.3.13), kann daraus ein fermionischer Feldoperator erzeugt werden: Da $\theta(x)$ beim Passieren eines Teilchens jeweils einen Sprung von $+\pi$ macht, pendelt die Funktion $e^{i\theta(x)}$ immer zwischen 1 und -1 . Der Feldoperator

$$\hat{\psi}_F^\dagger(x) = \hat{\psi}^\dagger(x) e^{i\theta(x)} \sim \sqrt{\rho_0 + \Pi(x)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{(2m+1)\theta(x)} e^{-i\phi(x)}$$

erfüllt dann die fermionische Kommutatorrelation $[\hat{\psi}_F(x_1), \hat{\psi}_F^\dagger(x_2)]_+ = \delta(x_1 - x_2)$. Dies ist folgendermaßen zu verstehen: man betrachte ein Produkt zweier Feldoperatoren z.B. $\hat{\psi}_F^\dagger(x_1)\hat{\psi}_F^\dagger(x_2)$ an Orten $x_1 < x_2$. Der Operator $\hat{\psi}_F^\dagger(x_2)$ erzeugt zuerst ein Teilchen am Ort x_2 , danach erzeugt $\hat{\psi}_F^\dagger(x_1)$ ein Teilchen am Ort x_1 . In dieser Reihenfolge beeinflussen sich die Operatoren $\theta(x)$ gegenseitig nicht, denn $\theta(x)$ sammelt ja π 's von links nach rechts beim jeweiligen Passieren eines Teilchens. Die vertauschte Anordnung $\hat{\psi}_F^\dagger(x_2)\hat{\psi}_F^\dagger(x_1)$ erzeugt zuerst ein Teilchen am Ort $x_1 < x_2$, wodurch der Operator $\theta(x_2)$ ein extra π aufnimmt und $e^{-i\theta(x_2)}$ ein extra -1 . Deshalb erfüllen die Operatoren $\hat{\psi}_F^\dagger(x)$ tatsächlich die fermionischen Vertauschungsrelationen. Analoge Überlegungen für andere Operator-Anordnungen führen zu demselben Ergebnis.

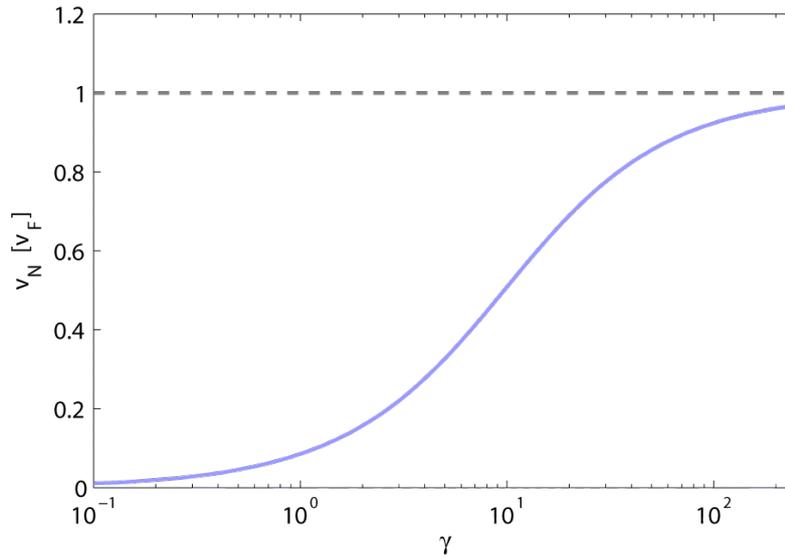


Abbildung 3.14: **Steifheiten v_J und v_N für das Lieb-Liniger-Gas** als Funktion von γ . v_J ist dabei gleich der Fermigeschwindigkeit $v_J = v_F$ (strichlierte Linie). v_N wächst mit zunehmenden γ (gefüllte Linie).

Durch Einsetzen der erhaltenen Ausdrücke für die bosonischen Feldoperatoren in den Hamilton-Operator eines System mit beliebiger Zwei-Körper Wechselwirkung, bekommt man in niedrigster Ordnung einen Hamilton-Operator, der quadratisch in den Ableitungen der Felder $\theta(x)$ und $\phi(x)$ ist. Ganz allgemein schreibt er sich als [Caz04]

$$\hat{H} = \frac{\hbar v_s}{2\pi} \int_0^L dx K [(\partial_x \phi(x))^2 + \frac{1}{K} (\partial_x \theta(x))^2]. \quad (3.44)$$

Der erste Ausdruck entspricht der kinetischen Energie, im zweiten Ausdruck steckt die Wechselwirkungsenergie. Es wurde der Luttinger-Parameter $K = \sqrt{v_J/v_N}$ eingeführt und $v_s = \sqrt{v_N v_J}$, wobei für Galilei-invariante Systeme v_J unabhängig von der Wechselwirkung ist und $v_J = v_F$, mit der Fermigeschwindigkeit $v_F = \hbar \pi n / m$. In Gitterproblemen (wie dem Bose Hubbard Modell) ist diese Symmetrie nicht gegeben und obige Behauptung trifft nicht zu. Der Parameter v_N hängt vom genauen Wechselwirkungspotential ab und kann z.B. für den Fall des Lieb-Liniger-Modells aus Bethe-Ansatz Lösungen berechnet werden.

Da der Hamilton-Operator (3.44) quadratisch ist kann er durch Wahl geeigneter Operatoren diagonalisiert werden. Man erhält für Teilchen im Kastenpotential

$$\hat{H} = \sum_q \hbar \omega(q) b^\dagger(q) b(q) + \frac{\hbar \pi v_s}{2LK} (N - N_0)^2, \quad (3.45)$$

mit N dem Teilchenzahloperator und N_0 der Teilchenzahl. Für kleine Impulse $q =$

3 Das eindimensionale Bosegas

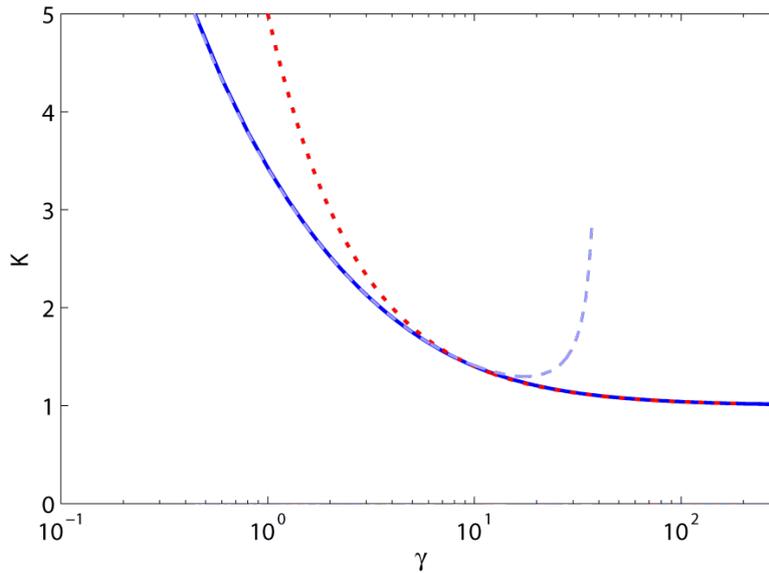


Abbildung 3.15: **Luttinger vs. Lieb-Liniger-Parameter:** Im Tonks-Gas ($\gamma \rightarrow \infty$) gilt $K = 1 + 4/\gamma$ (rot gepunktete Linie). Im Grenzfall schwacher Wechselwirkung gilt $K = \pi(1 - \sqrt{\gamma}/2\pi)^{-1/2} / \sqrt{\gamma}$ (strichlierte Linie). Die numerische Berechnung von K wird durch die durchgezogene Linie dargestellt.

$2n\pi/L$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ist das Spektrum linear $\omega(q) = v_s q$. Die Phonon-Operatoren $b^\dagger(q)$ erfüllen die bosonische Kommutatorrelation $[b(q), b^\dagger(q')] = \delta_{qq'}$.

Phänomenologisch kann v_N mit der Kompressibilität verknüpft werden

$$\kappa^{-1} = \rho_0^2 L \frac{\partial^2 E_0(N)}{\partial N^2} = \hbar \pi v_N \rho_0^2.$$

In Kapitel wurde die Grundzustandsenergie des Lieb-Liniger-Modells E_0 bereits numerisch berechnet. Die Parameter v_N und K können aus obiger Gleichung bestimmt werden. Die numerische erhaltenen Kurven sind in Abb.(3.14) und (3.15) aufgetragen.

KAPITEL 4

Korrelationen in ultrakalten Gasen

Die meisten physikalischen Observablen beschreiben makroskopische Eigenschaften wie Temperatur, Wechselwirkungsenergie oder Dichte und sind über ein Ensemble von Teilchen gemittelte Größen, die sich über Distanzen kleiner als der Teilchenabstand kaum ändern.

Ein schönes Beispiel für mikroskopische Größen sind Korrelationsfunktionen, welche in den verschiedensten Bereichen der Physik zur Anwendung kommen. Im Allgemeinen beschreiben sie Korrelationen von beliebigen Variablen an verschiedenen räumlichen und zeitlichen Punkten. So ist etwa in der Quantenoptik bei der Detektion einzelner Photonen die Wahrscheinlichkeit von Interesse, zwei Photonen zu verschiedenen Zeitpunkten zu messen. Die Korrelationseigenschaften hängen dabei stark vom quantenmechanischen Zustand der Photonen ab. Durch Messung von Photonkorrelationen kann so herausgefunden werden, ob sich ein Lichtfeld in einem kohärenten, thermischen oder in einem Fock-Zustand befindet [HB56].

Im Bereich ultrakalter Quantengase werden Korrelationsfunktionen in der Theorie zur qualitativen Beschreibung von Vielteilchenproblemen herangezogen. Deren Berechnung erfordert zumeist aufwendige mathematische Verfahren und ist oft nur numerisch möglich. Gleichzeitig bieten sich experimentelle Techniken an, Korrelationen in einem Vielteilchensystem auch zu messen. So können etwa Dichtekorrelationen über die Bestimmung des Strukturfaktors mittels Bragg-Spektroskopie direkt gemessen werden [Kuh10]. Der Strukturfaktor entspricht dabei der Anregungsrate eines Gases in Abhängigkeit von Energie und Impuls des Lasers.

Quantenfluktuationen sind direkt verknüpft mit Korrelationen und geben deshalb indirekt Information über Korrelationsfunktionen. Experimentell können z.B. durch hochauflösende Absorptionsspektren einer Gaswolke Dichtefluktuationen gemessen werden [Arm10]. Diese stehen über Zustandsgleichungen in Relation zu thermodynamischen Größen des Gases, was einen Vergleich mit Theorien vereinfacht.

Dieses Kapitel umfasst Korrelationsfunktionen des wechselwirkenden Bosegases in drei als auch in einer Dimension, mit besonderem Augenmerk auf die Drei-Körper-Korrelationsfunktion. Des Weiteren wird deren Einfluss auf die Drei-Körper Rekombination betrachtet, welche für unser Experiment den entscheidenden Prozess zur Bestimmung der Drei-Körper-Korrelationsfunktion darstellt. In Kapitel (4.4) wird genauer auf diese Methode eingegangen.

4.1 Die Korrelationsfunktion

Im Folgenden möchte ich die allgemeine mathematische Beschreibung von Korrelationsfunktionen kurz wiedergeben. Es werden jedoch nur räumliche Korrelationen besprochen, ohne Zeitabhängigkeit, da dies für unsere Experimente ausreichend ist.

Man betrachte ein Bosegas beliebiger Dimension und Wechselwirkung, bestehend aus N Teilchen. Das System kann durch eine symmetrische Mehrteilchenwellenfunktion $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ beschrieben werden. Deren Betragsquadrat gibt die Wahrscheinlichkeit Teilchen 1 am Ort x_1 , Teilchen 2 am Ort x_2 , usw. anzutreffen und es gilt die Normierung

$$\int |\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2 dx_1 \dots dx_N = 1. \quad (4.1)$$

Meistens ist man nur an der Teilchendichte $n(x)$ interessiert. Dazu integriert man das Betragsquadrat der Wellenfunktion über alle Teilchenkoordinaten, bis auf eine. Da die Teilchen ununterscheidbar sind, macht es keinen Sinn, dies z.B gerade für Teilchen 1 zu machen. Deshalb wiederholt man dies für alle Koordinaten, erhält aufgrund der Symmetrie der Wellenfunktion unter Teilchenaustausch N identische Ausdrücke, summiert darüber und erhält für die Dichte

$$n(x) = N \int |\psi(x, x_2, \dots, x_N)|^2 dx_2 \dots dx_N. \quad (4.2)$$

Wenn man sich nach der Wahrscheinlichkeit fragt, k Teilchen an Orten x_1, x_2, \dots, x_k anzutreffen, dann wird wiederum über die restlichen Koordinaten integriert, und die Korrelationsfunktion k -ter Ordnung ist

$$g^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{n^k} \frac{N!}{k!(N-k)!} \int |\psi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)|^2 dx_{k+1} \dots dx_N. \quad (4.3)$$

Der Vorfaktor resultiert aus den $N!/(N-k)!$ möglichen Kombinationen für die Wahl der k Koordinaten, unter Berücksichtigung der Ununterscheidbarkeit der Teilchen (Korrekturterm: $k!$).

Die für uns wichtige lokale Drei-Körper-Korrelationsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit, drei Teilchen am selben Ort zu messen. In einem translationsinvarianten System wählt man diesen im Ursprung und somit ist

$$g^{(3)} = g^{(3)}(0, 0, 0) = \frac{1}{n^3} \frac{N!}{3!(N-3)!} \int |\psi(0, 0, 0, x_4, \dots, x_N)|^2 dx_4 \dots dx_N. \quad (4.4)$$

Um $g^{(3)}$ für ein wechselwirkendes System zu berechnen, ist einerseits die Kenntnis der Wellenfunktion erforderlich, andererseits das Integral (4.4) auszuführen, was im allgemeinen sehr anspruchsvoll bis gar nicht möglich ist.

In zweiter Quantisierung ist eine äquivalente Formulierung der Korrelationsfunktion in der Sprache von Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ möglich. So ist die lokale Korrelationsfunktion

$$g^{(3)} = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(0)^3 \hat{\psi}(0)^3 \rangle}{n^3}, \quad (4.5)$$

wobei $\langle \dots \rangle$ den Erwartungswert für einen bestimmten Zustand bedeutet.

4.2 Korrelationen im 3D Bosegas

Für ein ideales Bose-Einstein-Kondensat in 3D kann $g_{3D}^{(3)}$ einfach berechnet werden

$$g_{\text{BEC}}^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = 1. \quad (4.6)$$

Die Korrelationsfunktion ist also flach. Im Gegensatz dazu erhält man für ein Gas thermischer Bosonen eine Verstärkung der lokalen Korrelation unabhängig von der Temperatur um den Faktor $3!$

$$g_{\text{therm}}^{(3)} = 6. \quad (4.7)$$

Man kann sich recht einfach mit Hilfe von Definition (4.5) für einen beliebigen thermischen Zustand davon überzeugen, dass durch die verschiedenen Kombinationen für die Feldoperatoren tatsächlich der Faktor $3! = 6$ resultiert. Es ist also 6 mal wahrscheinlicher drei Teilchen am selben Ort anzutreffen, als man sich erwarten würde, wenn man einfach nur die mittlere Dichte betrachtet. Erst bei der Kondensation des Gases verschwindet der Faktor $3! = 6$. Das Einsetzen der Kondensation geht also einher mit der Reduktion von $g_{3D}^{(3)}$ und somit einer Abnahme an Drei-Körper Verlusten.

Abb.(4.1) zeigt die räumliche Abhängigkeit der Korrelationsfunktion des thermischen Gases [Bur97]. Für Distanzen größer als die de Broglie-Wellenlänge geht $g_{3D}^{(3)}$ gegen 1, während sie im Ursprung auf den Wert 6 ansteigt.

Eine ähnliches Verhalten für einen thermischen Strahl aus Photonen wird als *Photon Bunching* bezeichnet, welches für einen idealisierten Laser, analog dem BEC für Atome, nicht auftritt. Das Hanbury-Brown-Twiss Experiment, welches in diesem Zusammenhang erwähnt werden sollte, misst im Gegensatz zu unseren Messungen die zeitliche Korrelation $g^{(2)}(\tau)$ zweier Photonen.

Interessiert man sich für $g_{3D}^{(3)}$ als Funktion der Temperatur, dann erwartet man sich einen Anstieg zwischen $T = 0$ und $T = T_c$ vom Wert 1 auf 6. Der genaue Verlauf ergibt sich indem man den Feldoperator $\hat{\psi}$ standardmäßig in einen kondensierten Teil ψ_0 und einen angeregten Teil ψ' aufspaltet

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_0 + \hat{\psi}'. \quad (4.8)$$

Dieser Ansatz, eingesetzt in (4.5), führt zu folgendem Ausdruck für die Korrelationsfunktion [Kag85]

$$g_{3D}^{(3)} = \frac{1}{n^3} (n_0^3 + 9n_0^2n' + 18n_0n'^2 + 6n'^3). \quad (4.9)$$

Die Dichte des Kondensats $n_0 = \langle \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0 \rangle$ und die Dichte der angeregten Teilchen $n' = \langle \hat{\psi}'^\dagger \hat{\psi}' \rangle$ erfüllen dabei die Relation $n_0 + n' = n$. Für ein ideales Bosegas ist

4 Korrelationen in ultrakalten Gasen

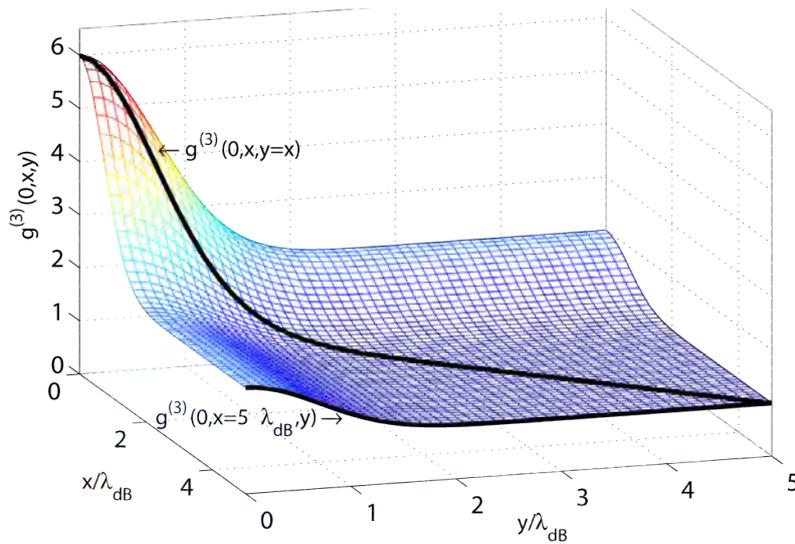


Abbildung 4.1: **Darstellung der Korrelationsfunktion des thermischen Gases:** $g_{\text{therm}}^{(3)}(0, x, y)$ ist proportional der Wahrscheinlichkeit drei Teilchen gleichzeitig an den Orten 0, x , und y anzutreffen. Quantenstatistik wird typischerweise innerhalb von Teilchenabständen kleiner als die de Broglie-Wellenlänge $\lambda_{dB} = \hbar / \sqrt{2\pi m k_B T}$ entscheidend. Die lokale Korrelation $g_{\text{therm}}^{(3)} = 3!$ ist gegenüber einem BEC verstärkt $g_{\text{BEC}}^{(3)}(0, x, y) = 1$. Schnitt entlang $g_{\text{therm}}^{(3)}(0, x = 5\lambda_{dB}, y)$: Hält sich eines der Teilchen weit außerhalb von λ_{dB} auf, geht $g_{3D}^{(3)}$ über in die Zwei-Körper Korrelation mit dem Faktor 2 im Ursprung: $g_{\text{therm}}^{(3)}(0, x = 5\lambda_{dB}, y) \approx g^{(2)}(0, y)$.

$n' = n(T/T_c)^{3/2}$ und durch Einsetzen in (4.9) ergibt sich die Temperaturabhängigkeit von $g_{3D}^{(3)}$ im Intervall $[0, T_c]$ zu

$$g_{3D}^{(3)}(T) = 1 + 6 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} + 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{6/2} - 4 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{9/2}. \quad (4.10)$$

Dieses Resultat ist für das ideale Bosegas prinzipiell exakt und in Abb. 4.2 dargestellt. Im schwach wechselwirkenden Gas jedoch, bei sehr tiefen Temperaturen im Bereich der Wechselwirkungsenergie $k_B T \sim g_{3D} n$, weicht die Korrelationsfunktion von obigen Verhalten ab. Denn dann wird der angeregte Anteil des Gases kaum durch die Temperatur erhöht, sondern vor allem durch die Wechselwirkung der kondensierten Teilchen. Dann kann durch Einführung neuer Quasiteilchen-Operatoren über die sogenannte *Bogoliubov-Transformation*, ein neuer Vakuumzustand definiert werden. In (4.5) eingesetzt erhält man als erste Bogoliubov-Korrektur für die lokale Korrelationsfunktion [Kag85]

$$g_{3D}^{(3)}(a_{3D}) = 1 + \frac{64}{\sqrt{\pi}} \sqrt{na_{3D}^3}. \quad (4.11)$$

Dieses Ergebnis ist nur im schwach wechselwirkenden Regime gültig, also wenn der charakteristische Parameter des Bosegas $na_{3D}^3 \ll 1$. In Kapitel (5.3) wird die Mess-

4.3 Korrelationen im wechselwirkenden 1D Gas

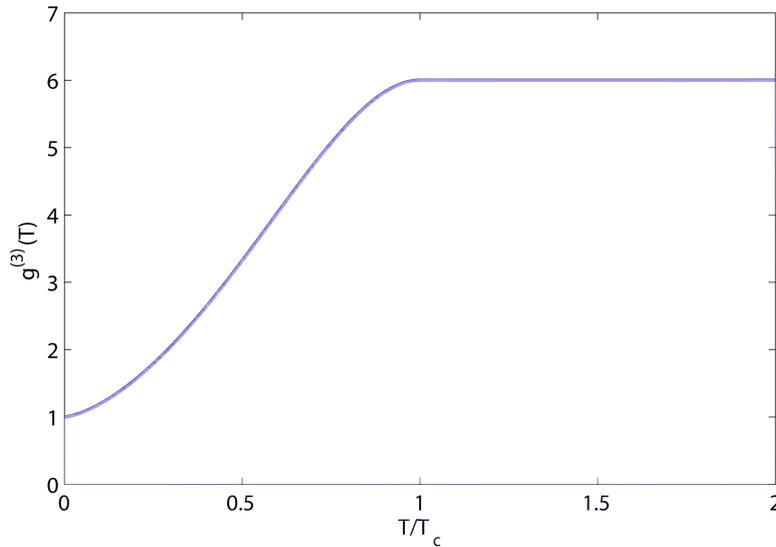


Abbildung 4.2: **Korrelationsfunktion** $g_{3D}^{(3)}$ in Abhängigkeit von der Temperatur T . $g_{3D}^{(3)}$ steigt gemäß Gl. 4.10 mit steigender Temperatur vom Wert 1 auf 6.

methode erklärt, mit der wir diesen universalen Anstieg der Korrelation $g_{3D}^{(3)}$ mit der Streulänge a_{3D} verifizieren.

4.3 Korrelationen im wechselwirkenden 1D Gas

Eindimensionale Systeme bieten die Möglichkeit, stark wechselwirkende Mehrteilchenphysik zu verstehen, indem man sich deren exakter Lösungen bedient [Lie63b, Yan69]. Es stellt sich heraus, dass die Dimensionalität bemerkenswerte Folgen für die Korrelationseigenschaften hat. So spiegelt sich das bereits erwähnte Phänomen der Fermionisierung in der lokalen Korrelationsfunktion von Bosonen wider, nämlich geht deren Wert für starke Wechselwirkungen asymptotisch gegen Null. Die starke Abstoßung der Teilchen übernimmt hier also die Rolle des Pauli-Prinzips bei Fermionen, wonach die Wahrscheinlichkeit, mehrere identische Teilchen am selben Ort anzutreffen, verschwindet.

Diese Systeme liegen weit außerhalb des Geltungsbereiches von *Mean-Field*-Theorien. Für den Fall von Bosonen bei $T = 0$ wird zumeist das exakt gelöste Lieb-Liniger-Modell verwendet. In zweiter Quantisierung lautet dessen Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \int dx \left(\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \psi^\dagger(x) \partial_x \psi(x) + \frac{g_{1D}}{2} \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x) \right). \quad (4.12)$$

Im Prinzip sind Korrelationsfunktionen beliebiger Ordnung mittels (4.3) und der Kenntnis der Wellenfunktion und des Lieb-Liniger-Grundzustandes auszurechnen. Die-

4 Korrelationen in ultrakalten Gasen

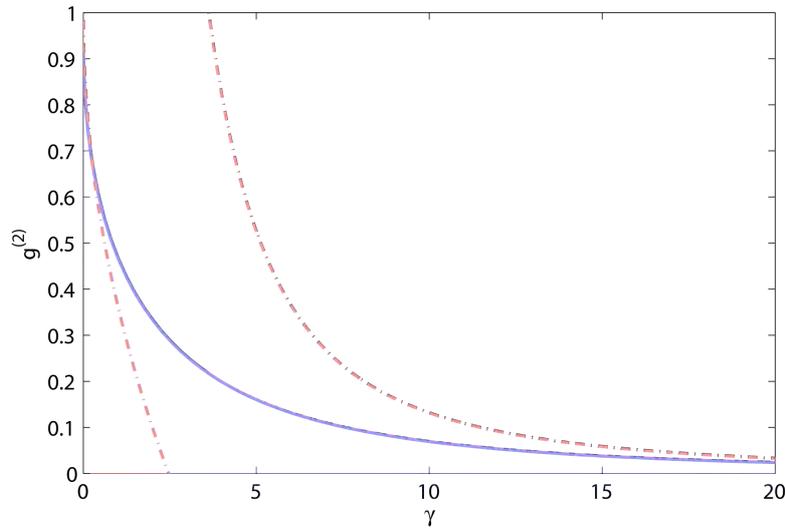


Abbildung 4.3: **Korrelationsfunktion** $g_{1D}^{(2)}$ als Funktion von γ . Numerisch berechnete Kurve (durchgezogene Linie) mit den analytischen Näherungen (4.16) und (4.17) in den Grenzfällen $\gamma \ll 1$ bzw. $\gamma \gg 1$ (strichliert).

se ist jedoch in komplizierten Gleichungen für die Koeffizienten $a(P)$ des Bethe-Ansatzes (3.11) enthalten und oft nur in den Grenzfällen kleiner bzw. großer Lieb-Liniger-Parameter γ analytisch lösbar.

Die lokale Zwei-Körper-Korrelationsfunktion $g_{1D}^{(2)}$ kann unter Verwendung des *Hellmann-Feynman-Theorems* [Fey39] auf einfachere Weise berechnet werden. Man kann über die Normierungsbedingung $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ zeigen, dass, wenn die Eigenenergie eines Hamilton-Operators von einem systemspezifischen Parameter λ abhängt, ganz allgemein gilt

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle \psi(\lambda) | \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda} | \psi(\lambda) \rangle, \quad (4.13)$$

mit $\psi(\lambda)$ dem Eigenvektor zur Eigenenergie $E(\lambda)$.

Im Falle des Hamilton-Operators (4.12) hat man das Glück, dass dessen Ableitung nach der Kopplungskonstante gerade die Korrelationsfunktion $g_{1D}^{(2)}$ ergibt

$$g_{1D}^{(2)} = \frac{L}{2n^2} \frac{\partial E_0}{\partial g_{1D}} = \frac{L}{2n^2} \langle \phi_0 | \frac{\partial \hat{H}}{\partial g_{1D}} | \phi_0 \rangle. \quad (4.14)$$

Die Grundzustandsenergie ist durch Gleichung (??) gegeben und mit $\gamma = mg_{1D}/\hbar^2 n$ wird (4.14) zu

$$g_{1D}^{(2)} = \frac{de(\gamma)}{d\gamma}. \quad (4.15)$$

Die numerisch berechnete Kurve ist in Abb.(4.3) dargestellt. Für das stark bzw.

4.3 Korrelationen im wechselwirkenden 1D Gas

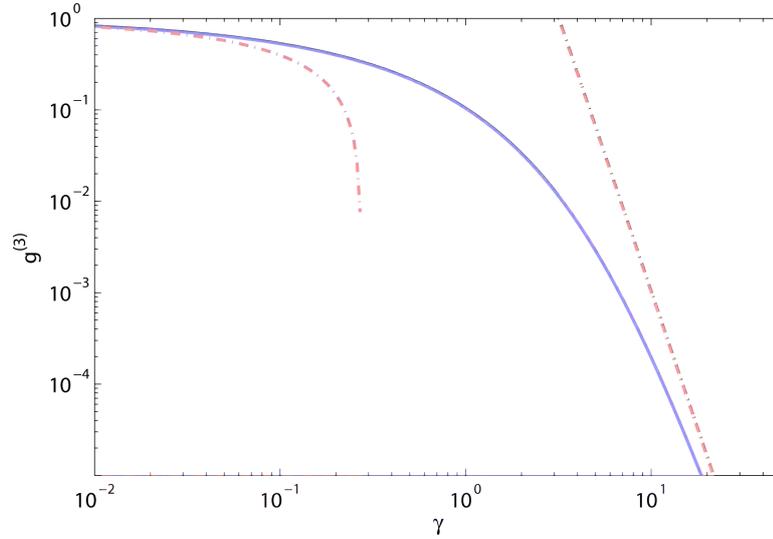


Abbildung 4.4: **Korrelationsfunktion** $g_{\text{1D}}^{(3)}$ als Funktion von γ . Die exakte Kurve (aus [Che06]) mit den analytischen Näherungen (4.18) und (4.19) in den Grenzfällen $\gamma \ll 1$ bzw. $\gamma \gg 1$.

schwach wechselwirkende Gas können folgende analytische Ausdrücke [Gan03] angegeben werden

$$g_{\text{1D}}^{(2)} = 4\pi^2/3\gamma^2, \quad \gamma \gg 1, \quad (4.16)$$

$$g_{\text{1D}}^{(2)} = 1 - 2\sqrt{\gamma}/\pi, \quad \gamma \ll 1. \quad (4.17)$$

Die für unsere Experimente relevante Drei-Körper-Korrelationsfunktion kann leider nicht mit dem Hellmann-Feynman Theorem berechnet werden. Sie wurde jedoch mathematisch aufwendig in [Che06] über den gesamten Wechselwirkungsbereich bestimmt, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen in den Grenzfällen sehr starker (bzw. schwacher) Wechselwirkung [Gan03], nämlich

$$g_{\text{1D}}^{(3)} = 16\pi^6/15\gamma^6, \quad \gamma \gg 1, \quad (4.18)$$

$$g_{\text{1D}}^{(3)} = 1 - 6\sqrt{\gamma}/\pi, \quad \gamma \ll 1. \quad (4.19)$$

Die wichtige Aussage dieser Ergebnisse ist, dass im Tonks-Gas der gleichzeitige Aufenthalt mehrere Atome am selben Ort sehr unwahrscheinlich ist. Dies wird sich in einer starken Unterdrückung von Drei-Körper Rekombinationen bemerkbar machen.

Für den allgemeinen Fall $T \neq 0$ konnten kürzlich analytische Lösungen für $g_{\text{1D}}^{(3)}(T, \gamma)$ berechnet werden [Kor11].

4.4 Drei-Körper Korrelation und Rekombinationen

Die Drei-Körper-Korrelationsfunktion ist direkt proportional zur Rekombinationsrate dreier Atome [Kag85]. Dabei entstehen ein schwach gebundenes Molekül und ein freies Teilchen, welche nach der Kollision (für unsere Fallenparameter) üblicherweise genug Energie erhalten um die Falle zu verlassen. Daher kann man über die Messung von Verlustaten, sofern man andere Verlustprozesse ausschließen kann, Informationen über die Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ erhalten. Dies ist der Schlüssel für unsere Messungen von $g^{(3)}$ und deshalb soll im Folgenden der Prozess des Drei-Körper-Verlustes genauer beleuchtet werden.

Für eine Drei-Körper-Rekombination ist es nötig, dass sich drei Atome an einem gemeinsamen Ort stoßen. Da $g^{(3)}$ proportional der Wahrscheinlichkeit ist drei Atome am selben Ort vorzufinden, ist die Relevanz von $g^{(3)}$ für das Zustandekommen eines Stoßes intuitiv klar. Formal wurde dies von Y. Kagan gezeigt [Kag85]. Dabei definiert er einen lokalen Wechselwirkungs-Hamilton-Operator, welcher die Rekombination dreier Atome zu einem schwach gebundenen Molekül und einem freien Atom (mit kinetischer Energie $\gg T$) beschreibt

$$\hat{H}' = \tilde{V} \int dr \hat{\phi}^\dagger(r) \hat{\psi}^\dagger(r) \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r) \hat{\psi}(r) + \text{h.c.} \quad (4.20)$$

Hier sind $\hat{\psi}(r)$ bzw. $\hat{\phi}(r)$ die Feldoperatoren für Atome bzw. Moleküle. Die Amplitude \tilde{V} ist für ultrakalte Gase unabhängig von den Impulsen der Stoßpartner und kann deshalb vor das Integral gezogen werden. Die Rekombinationsrate kann über Fermis Goldene Regel berechnet.

Im Schwerpunktsystem erhält das Molekül, aufgrund von Energie- und Impulserhaltung, $1/3$ der freiwerdenden Bindungsenergie E_B , während das Atom $2/3E_B$ abbekommt. Diese Energien sind im Kontext ultrakalter Quantengase viel größer als die typischen Energien des Systems, also der *Mean-Field* Energie für ein BEC (bzw. der Temperatur für ein thermisches Gas). Daher ist die Längenskala ($\sim \hbar/\sqrt{mE_B}$) auf der sich der Rekombinationsprozess abspielt kleiner als die Korrelationslänge $\xi = \hbar/\sqrt{mng_{3D}}$ des BEC (bzw. die de-Broglie Länge λ_{dB} des thermischen Gases). Gleichzeitig gilt für die Zeitskala des Rekombinationsprozess $t \sim \hbar/E_B$. Diese ist klein gegenüber den typischen Zeitskalen $\hbar/g_{3D}n$ im wechselwirkenden (bzw. $\hbar/k_B T$ im thermischen) Bosegas.

Die Rekombinationsrate ist dann direkt proportional zur lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ [Kag85]:

$$W = K^{(3)} g^{(3)} n^3 \quad , \quad K^{(3)} = \frac{2\pi}{\hbar} |\tilde{V}|^2 \sum_k \delta\left(\frac{3\hbar^2 k^2}{4m} - E_B\right). \quad (4.21)$$

Der Vorfaktor $K^{(3)}$ beinhaltet die detaillierte Information über die Drei-Teilchenphysik der Kollision und der Molekülbildung [Fed96]. Im universellen Regime ist $K^{(3)}$ eine

4.4 Drei-Körper Korrelation und Rekombinationen

Funktion der Streulänge a_{3D}

$$K^{(3)} = \frac{\hbar}{m} C(a_{3D}) a_{3D}^4, \quad (4.22)$$

und wird durch die vierte Potenz der Streulänge dominiert. Der Vorfaktor $C(a_{3D})$ beschreibt die Dimerphysik und die Kopplung an die periodische Serie von Efimov Zuständen [Kra06].

Der Teilchenverlust durch Drei-Körper Rekombination resultiert in einer Ratengleichung

$$\dot{n}(t) = -3K^{(3)}g^{(3)}n^3(t), \quad (4.23)$$

unter der Annahme, dass sowohl das Molekül als auch das Atom genug Energie besitzen um die Falle zu verlassen.

4.4.1 Drei-Körper Rekombination im tiefen 2D-Gitter

Obige Berechnung der Drei-Körper Rekombinationsrate W betrachtet einen dreidimensionalen Stoßprozess. Für unser 1D System ist die Streulänge kleiner als der radiale Einschluss und somit kann die Rekombination auch wirklich als dreidimensionaler Prozess angesehen werden. Deshalb ist die Annahme $K_{1D}^{(3)} \approx K_{3D}^{(3)} = K^{(3)}$ gerechtfertigt. Die lokale Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ hängt jedoch vom Vielteilchenzustand ab, welcher wiederum von der Dimensionalität wesentlich bestimmt wird. Daher ist in 1D die Rate $W = K^{(3)}g_{1D}^{(3)}n^3$, im Gegensatz zum 3D-Gas $W = K^{(3)}g_{3D}^{(3)}n^3$.

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, wie sich Tunnelprozesse zwischen den Gitterplätzen (bzw. 1D Systemen) in einem 2D-Gitter auf die Rekombinationsrate auswirken und ob diese zu erhöhten Verlusten führen kann. Es sind nämlich nicht nur Rekombinationsprozesse dreier Atome am selben Gitterplatz möglich, sondern in nächst höherer Ordnung kann z.B. das dritte Atom von einem benachbarten Gitterplatz stammen.

Um dies abzuschätzen schreibt man die Feldoperatoren, analog zur Herleitung des Bose-Hubbard Modells [Jak98], in Form von Wannierfunktionen $w_n(x - x_i)$ (bzw. $w_n(y - y_j)$) und Erzeuger/Vernichter Operatoren \hat{b}_{i,j,n_x,n_y} für Atome

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}_{1D}(z) \sum_{i,j,n_x,n_y} w_{n_x}(x - x_i) w_{n_y}(y - y_j) \hat{b}_{i,j,n_x,n_y}. \quad (4.24)$$

Die Wannierfunktionen sind lokalisierte Funktion um den Gitterplatz i, j und sind über die Blochfunktionen $u_q^{n_x,n_y}(x, y)$ definiert. Für unser tiefes Gitter sind wir im untersten Blochband $n_x, n_y = 0$ und deshalb ist nur $w_0(x - x_i)$ (bzw. $w_0(y - y_j)$) relevant. Diese sind für ein sehr tiefes Gitter annähernd der gaußförmige Grundzustand des harmonischen Oszillators. Der Ansatz (4.24), eingesetzt in die Definition für $g^{(3)}$ (4.5), ergibt für die lokale Korrelationsfunktion einer 1D Röhre $g_{1D}^{(3)}$ in erster Näherung folgende Korrektur

$$g_{1D}^{(3)} \rightarrow g_{1D}^{(3)} \left(1 + 2 \frac{w_0(d)}{w_0(0)} \right) \approx g_{1D}^{(3)}, \quad (4.25)$$

4 Korrelationen in ultrakalten Gasen

mit dem Gitterabstand d . Hier wurde angenommen, dass der Gitterabstand und die Gittertiefe in x - und y -Richtung jeweils gleich sind, deshalb der Faktor 2. Der Quotient $w_0(d)/w_0(0)$ ist für unser Gitter vernachlässigbar klein, da die Wannierfunktion sehr schnell abfällt. Somit ist die Korrelation trotz Tunneln nahezu perfekt durch jene eines isolierten 1D-Systems $g_{1D}^{(3)}$ beschrieben.

Tunnelprozesse der Bose-Hubbard Form $-J \hat{b}_{i+1}^\dagger \hat{b}_i$ haben kaum Einfluss auf die Rekombinationsrate in den 1D Röhren. Sie können höchstens, aufgrund des Gefälles des chemischen Potentials zwischen benachbarten Röhren, zur Erwärmung des Systems beitragen.

KAPITEL 5

Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit umfasst das folgende Kapitel. Wir bestimmen die lokale Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ für bosonische Teilchen in drei sowie in einer Dimension, indem wir die Drei-Körper-Verlustrate in einem Gas aus Cäsium Atomen messen [Tol04]. Dabei interessiert uns vor allem der Einfluss von Wechselwirkung zwischen den Teilchen auf die Korrelation des Systems. Dank der breiten magnetischen Feshbach-Resonanz von Cäsium können wir die Korrelationsfunktion für fast beliebige Wechselwirkungsstärken messen. Dabei erzielen wir gute Übereinstimmung mit theoretischen Vorhersagen, sowohl in 1D, als auch in 3D.

In 3D können wir mit ein Anwachsen der lokalen Korrelationsfunktion $g_{3D}^{(3)}$ eines BEC mit dem Gasparameter na_{3D}^3 beobachten. Traditionelle Mean-Field-Beschreibung erklären dieses universelle Verhalten nicht. Erst die Berücksichtigung von Quantenfluktuationen bzw. der Übergang in ein Quasi-Teilchen Bild mittels Bogoliubov-Transformation kann dieses Korrelationsverhalten wiedergeben. Des Weiteren konnte auch der Bunching-Effekt für das thermische Gas beobachtet werden, also eine Verstärkung von $g_{3D}^{(3)}$ um einen Faktor 6 gegenüber dem BEC.

Ich möchte als erstes nur kurz den experimentellen Aufbau unserer Apparatur skizzieren mit welchem wir unsere Messungen durchführen, mit besonderem Augenmerk auf das optische Gitter, welches unsere 1D-Röhren erzeugt. Danach wird unsere Messmethode, welche sowohl im 1D als auch im 3D Fall herangezogen wird, erklärt. Dann wird die Messung von $g_{3D}^{(3)}$ in 3D Geometrie im Detail erläutert und anschließend jene für das wechselwirkende 1D Bosegas.

5.1 Erzeugung des BEC

Der Aufbau unseres Cs-Experiments ist ausführlich in [Gus08] beschrieben. Einen ganz wesentlichen Bestandteil stellt das optische Gitter dar [Fli06, Kop07]. Denn einerseits erfolgt durch Raman-Seitenbandkühlen in einem 3D-Gitter ein entscheidender Kühschritt [Ker00]. Andererseits erzeugen zwei retro-reflektierte Laserstrahlen mit Wellenlänge ($\lambda = 1064\text{nm}$) ein 2D-Gitter mit Gitterabstand $d = \lambda/2$, dessen Gitterplätze individuelle 1D-Systeme darstellen.

Die Atome fliegen mit einer wahrscheinlichsten Geschwindigkeit von 260 m/s aus einer Ofensektion, werden durch einen 68 cm langen Zeeman-Abbremsler in eine

5 Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion

magneto-optische Falle (MOT) [Met99] geleitet und verlieren dabei den Großteil ihrer kinetischen Energie. In der MOT werden sie, umgeben von einer Glaszelle und bei einem Druck von weniger als einem μPa , gefangen gehalten und gleichzeitig gekühlt, siehe [Unt05]. Ein Spulenpaar im Inneren der Glaszelle, welche ein Quadrupol-Magnetfeld erzeugt, sorgt für die gewünschte örtlich variierende Hyperfeinaufspaltung der m_F -Zustände der Cs-Atome. Sechs zirkular polarisierte Laserstrahlen bremsen unter Ausnutzung des Dopplereffekts die Atome bis zum Recoil-Limit und stellen durch deren Rotverstimmung gleichzeitig ein Potential dar, welches die Atomwolke komprimiert. Dabei erreicht man Temperaturen von ca. $50 \mu\text{K}$ bei einer Teilchenzahl von ca. $2 \cdot 10^8$.

Als weiterer Schritt folgt die Raman-Seitenbandkühlung im 3D-Gitter [Ker00]. Dabei wird der unterste m_F - und Vibrationszustand des tiefen Gitterpotentials $|m_F = 3, \nu = 0\rangle$ besiedelt und man erhält in unserem Experiment Temperaturen von ca. 700 nK [Fli06].

Anschließend wird die Atomwolke in eine Reservoir-Falle transferiert, bestehend aus zwei gekreuzten Laserstrahlen, und einem zusätzlichen Magnetfeldgradienten um die Schwerkraft zu kompensieren. Dabei wird das Gas bei hohen Streulängen (ca. $1500 a_0$) verdampfungsgekühlt, um die Probe nicht zu stark aufzuheizen.

Um die kritischen Phasenraumdichte zu erreichen werden zusätzlich zwei gekreuzte, stark fokussierte Laserstrahlen verwendet um in der Mitte der Reservoirfalle einen sogenannten *Dimple* zu erzeugen, also eine tiefe Einkerbung im Potentialverlauf. Nachdem sich der Großteil der Atome durch elastische Stöße in den Dimple relaxieren, wird die Reservoirfalle abgeschaltet und durch kontinuierliche Verringerung der Laserleistung der Dimplestrahlen Evaporation bis zu Kondensation erzwungen. Ein BEC in unseren Messungen besteht typischerweise aus $1 \cdot 10^5$ Atomen.

5.2 Messmethode

Wie bereits erwähnt liegt unserer Messmethode der Drei-Körper-Verlust zugrunde, sowohl in 3D als auch in 1D. Aus den Verlusten der Gesamtteilchenzahl $N(t)$ können wir den Koeffizienten $3K^{(3)}g^{(3)}$ aus Gl.(4.23) bestimmen. Um jedoch $g^{(3)}$ zu erhalten, müssen wir uns des Faktors $K^{(3)}$ entledigen: dieser hängt nur von der Drei-Teilchenphysik abhängig, unabhängig vom Vielteilchenzustand des Systems. Somit fällt dieser bei gegebener Streulänge a_{3D} aus dem Verhältnis zweier Verlustkoeffizienten für zwei verschiedene Konfigurationen [i] und [ii] einfach raus

$$\frac{K^{(3)}g_{[i]}^{(3)}}{K^{(3)}g_{[ii]}^{(3)}} \approx \frac{g_{[i]}^{(3)}}{g_{[ii]}^{(3)}}, \quad (5.1)$$

wobei in der 3D-Messung ein BEC [i] und ein thermisches Gas [ii], während für die 1D-Messung ein 1D-Bosegas [i] und ein 3D BEC [ii] herangezogen werden. Für letzteren Fall liegt die Gleichheit der beiden $K^{(3)}$ -Koeffizienten vielleicht nicht ganz so

nah, da ein Einfluss der Dimensionalität durchaus vorstellbar ist. Jedoch scheint dies für unsere Fallenparameter und Streulängen (siehe Kapitel (5.4)) gerechtfertigt.

Für Cs Atome im untersten Zeemann-Subniveau $|F = 3, m_F = 3\rangle$ können Zwei-Körper-Verluste über *Spin-Flip* Prozesse ausgeschlossen werden, da diese energetisch verboten sind. Des Weiteren sind Ein-Körper-Verluste aufgrund von Stößen mit dem Hintergrundgas erst auf Zeitskalen von Minuten relevant, was die Dauer unserer Messung ($\sim 1s$) bei weitem übersteigt.

Unser System unterliegt deshalb der Ratengleichung (4.23) $\dot{n}(\mathbf{r}, t) = -3K^{(3)}g^{(3)}n^3(\mathbf{r}, t)$. Entsprechend unserer Fallentiefe ($2\pi \cdot 45kHz$) und den freiwerdenden Bindungsenergien ($\sim MHz$), wird hier angenommen, dass ein Rekombinationsereignis den Verlust dreier Teilchen zur Folge hat (deshalb der Faktor 3). Die Möglichkeit von sekundären Verlustprozessen, in denen ein aus einem Rekombinationsprozess stammendes Teilchen ein weiteres aus der Falle stößt, wird berücksichtigt, der Effekt für unsere Messung ist jedoch gering (siehe Kap. (5.3)).

Obige Ratengleichung über das Dichteprofil integriert ergibt ganz allgemein folgende Gleichung für die Gesamtteilchenzahl N

$$\dot{N}(t) = -3Kg^{(3)} \int n^3(\mathbf{r}, t)d^3r. \quad (5.2)$$

Die Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ ist für das wechselwirkende BEC in 3D eine Funktion der Dichte $n(\mathbf{r})$ (siehe Gl. 4.11), und somit des Ortes. In 1D ebenso, denn wegen der Abhängigkeit vom Lieb-Liniger Parameter von der Dichte ist $g^{(3)}(\gamma(n(\mathbf{r})))$ (siehe Gl. (??)). Deshalb darf man $g^{(3)}$ in (5.2) eigentlich nicht vor das Integral ziehen. Da aber der Drei-Körper-Verlust mit der dritten Potenz der Dichte skaliert und noch dazu $g^{(3)}$ mit abnehmender Dichte abnimmt, findet der Großteil der Verluste im Zentrum der Falle statt. Somit kann in guter Näherung $g^{(3)}$ als die Drei-Körper-Korrelationsfunktion bei zentraler Dichte vor das Integral geschrieben werden.

Experimentell wird durch Absorptionenbilder die Gesamtteilchenzahl zu verschiedenen Zeiten gemessen. Aus der Verlustkurve und der stetigen Kenntnis des Dichteprofiles $n(\mathbf{r}, t)$ könnte dann der Verlustkoeffizient $3K^{(3)}g^{(3)}$ berechnet werden.

Es treten jedoch zahlreiche Probleme auf, möchte man für die Bestimmung von $K^{(3)}$ die gesamte Verlustkurve nutzen. Vor allem für unser 1D-System, bestehend aus tausenden Röhren, stellt dies eine Schwierigkeit dar:

- Es müsste in jeder Röhre die Änderung des Dichteprofiles und der Korrelationsfunktion $g_{1D}^{(3)}$ für kleine Zeitschritte immer wieder neu berechnet werden, um Teilchenverlust und Erwärmung zu berücksichtigen. Denn sowohl das Dichteprofil als auch $g^{(3)}$ sind gemäß der Yang-Yang Thermodynamik eine Funktion der Temperatur [Yan69]. Für $g_{1D}^{(3)}$ ist das genaue Verhalten mit der Temperatur nicht bekannt und kann nur durch die Zwei-Körper-Korrelationsfunktion $g_{1D}^{(2)}(T)$ abgeschätzt werden, noch dazu nur für spezielle Grenzfälle [Khe03]. Die Messung von $g_{1D}^{(3)}$ bei $T = 0$ wird also umso komplizierter je länger sie dauert.

5 Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion

- Die Ratengleichung ist für wenige Atome pro Röhre nicht mehr anwendbar, da sie strenggenommen nur gilt, wenn die Änderung der Teilchenzahl dN pro Zeitintervall dt klein gegenüber der Gesamtteilchenzahl N ist. Da bei einem Verlustereignis $dN = 3$, weicht bereits bei 10 Atomen pro Röhre die wahre Verlustkurve von jener der Ratengleichung stark ab.
- Des Weiteren ist in unserem 2D-optischen Gitter tunneln von Atomen in benachbarte Röhren möglich. Bei einer Messung die viel länger als die Tunnelzeit ($\sim 1s$) dauert muss auch dies berücksichtigt werden. Tunnelprozesse beschleunigen die Erwärmung des Systems zusätzlich.

Es erweist sich als geschickter (und einfacher) die Steigung $\dot{N}(0)$ aus den ersten 85 – 90% (der Anfangsteilchenzahl) mit der gefitteten Verlustkurve zu bestimmen um anschließend mit dem anfänglichen Dichteprofil $n(\mathbf{r},0)$ den Verlustkoeffizienten zu erhalten, also

$$3K^{(3)}g^{(3)} = -\frac{\dot{N}(0)}{\int n^3(\mathbf{r},0)d^3r} \quad (5.3)$$

Die von uns gewählte Methode unterschätzt den Wert von $3K^{(3)}g^{(3)}$ um durchschnittlich 15%, vermeidet jedoch andere Fehlerquellen und einen großen Rechenaufwand.

5.3 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 3D

In 3D Geometrie bestimmen wir den Faktor $3K_{3D}^{(3)}g_{3D}^{(3)}$ für verschiedene Streulängen a_{3D} jeweils für ein BEC mit anfänglicher Teilchenzahl von typischerweise $9 \cdot 10^4$ und einem thermischen Gas mit $3.5 \cdot 10^5$ Atomen bei ca. 200 nK. Dazu variieren wir über eine breite magnetische Feshbach-Resonanz die s-Wellen Streulänge in einem Bereich zwischen $50 a_0$ bis $700 a_0$ (Bohr-Radien). Wir bestimmen die Teilchenzahl $N(t)$ nach variabler Wartezeit t und einer zusätzlichen Expansionszeit von 50 ms, in denen das Gas eine für aussagekräftige Absorptionsbilder ausreichende Größe erlangt. Während der Expansionszeit sind keine großen Teilchenverluste zu erwarten, da das Gas dabei schnell an Dichte verliert.

Das Bosegas ist dabei in einer gekreuzten Dipolfalle, mit horizontalen Fallenfrequenzen $\omega_{x,y}$ und vertikaler Fallenfrequenz ω_z , gefangen. Die auf die Probe wirkende Schwerkraft wird mit einem magnetischen Feldgradienten in z-Richtung ($\partial_z B_z \approx 32$ Gauss/cm) kompensiert [Web03]. Für das thermische Gas werden folgende Fallenfrequenzen verwendet $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (29(1), 80(2), 74(1))$ Hz, und für das BEC $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (11.8(1), 17.9(3), 13.5(1))$ Hz.

Typische Verlustkurven sind in Abb.(5.1(a)) zu sehen. Den anfänglich starken Verlusten folgt ein Abklingen der Verlustkurve aufgrund der abnehmenden Dichte. Der genaue Verlauf der Verlustkurve ist ein Zusammenspiel von Korrelation $g_{3D}^{(3)}$, Drei-

5.3 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 3D

Teilchen Physik ($K^{(3)}$) und Dichte $n(\mathbf{r})$. Die anfängliche Steigung $\dot{N}(0)$ erhält man durch einen linearen Fit.

Dichteprofile in 3D

Um den Verlustkoeffizienten aus der Verlustmessung zu extrahieren, müssen (gemäß 5.3) für die jeweiligen Messparameter die Dichteprofile bekannt sein um dann $\int n(\mathbf{r})^3 d^3r$ zu berechnen. Dafür ist die anfängliche Teilchenzahl N_0 , die Fallenfrequenzen $\omega_{x,y,z}$, Streulänge a_{3D} und die Temperatur T notwendig. Die bekannten Dichteprofile für das thermische Gas, das wechselwirkende BEC in Thomas-Fermi Näherung und das ideale BEC wurden in Kap.(2) ausführlich beschrieben.

Die Berechnung von $\int n(\mathbf{r})^3 d^3r$ erfolgt sowohl für das thermische Gas als auch das wechselwirkende BEC numerisch.

Resultate in 3D

Abb.(5.1(b)) zeigt die Messresultate für das Verhältnis $g_{therm}^{(3)}/g_{BEC}^{(3)}$ der Drei-Körper-Korrelationsfunktionen für das thermische Gas und das BEC, gemessen bei jeweils derselben Streulänge a_{3D} . Die Messpunkte sind in guter Übereinstimmung, mit dem in Kap.(4.2) beschriebenen, theoretisch erwarteten Bogoliubov-Korrekturterm [Kag85]

$$g_{therm}^{(3)}/g_{BEC}^{(3)} = 6 / \left(1 + \frac{64}{\sqrt{\pi}} \sqrt{na_{3D}^3} \right). \quad (5.4)$$

Des Weiteren sehen wir für schwache Wechselwirkungen den Faktor $3! = 6$ zwischen dem BEC und dem thermischen Gas aufgrund von Quantenstatistik. Für steigende Gasparameter na_{3D}^3 (zB. $na_{3D}^3 \approx 0.1$ für $a_{3D} \approx 700 a_0$) gewinnen Quantenfluktuationen an Bedeutung und reduzieren das obige Verhältnis.

Es sei ausdrücklich erwähnt, dass wir diese Messung mit einem reinen BEC ohne thermischen Anteil durchgeführt haben.

Sekundäre Verluste

Bisher wurde stets angenommen, dass ein Rekombinationsereignis den Verlust genau dreier Teilchen zur Folge hat, nämlich des bei der Kollision entstandenen Dimers und des überlebenden Atoms. Nun treten Drei-Körperverluste gehäuft bei hohen Dichten, also im Zentrum der Gaswolke, auf. Daher kann es passieren, dass die Rekombinationsprodukte beim Verlassen der Falle weitere Atome stoßen und daher zusätzliche Verluste verursachen. Im schlimmsten Fall könnte dies in sogenannten *Verlust-Lawinen* enden, was den Kollaps der Gaswolke zur Folge hätte [Sch01].

Für unsere Parameter tritt solch ein Szenario zwar nicht auf, jedoch ist es für große Streulängen wahrscheinlich, dass mehr als drei Teilchen bei einem Rekombinationsprozess verloren gehen. Denn zum einen ist die Stoßwahrscheinlichkeit $\sigma \langle \int_{\vec{\gamma}} n(\vec{\gamma}) d\vec{\gamma} \rangle$

5 Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion

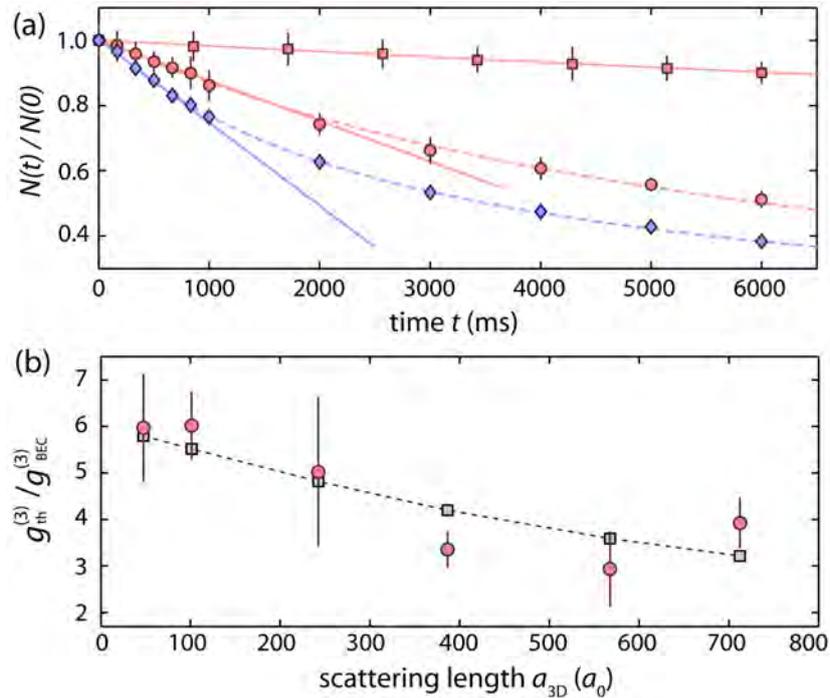


Abbildung 5.1: **Drei-Körperverlust in 3D:** (a) Relative Teilchenzahl $N(t)/N(0)$ als Funktion der Zeit t für: 3D BEC mit $a_{3D} = 101(2) a_0$ (rote Quadrate), 3D BEC mit $386(3) a_0$ (rote Kreischen) und ein thermisches Gas mit $386(3) a_0$ (blaue Diamanten). Die anfängliche Steigung $\dot{N}(0)$ (durchgezogene Linien) ist unsere relevante Messgröße. (b) Das Verhältnis der Korrelationsfunktionen $g_{th}^{(3)}/g_{BEC}^{(3)}$ für verschiedene Streulängen a_{3D} . Die Vorhersage gemäß Gl.5.4 (graue Kästchen) wurde an den zentralen Dichten n_0 ausgewertet. Die Messung (rote Kreischen) zeigt deutlich eine Unterdrückung des schwach wechselwirkenden BEC um den Faktor $3! = 6$. Für größere werdende Wechselwirkung folgen die Messpunkte der Bogoliubov-Korrektur.

groß. Hier ist $n(\vec{\gamma})$ die Dichte entlang eines Integrationsweges γ vom Entstehungsort eines Dimers (bzw. Atoms) bis zum Austritt aus der Gaswolke, und der Wirkungsquerschnitt für eine Dimer-Atom (bzw. Atom-Atom) Kollision $\sigma = 8\pi a_{3D}^2/(1 + k^2 a_{3D}^2)$, wobei $\hbar k$ der Impuls des Dimers (bzw. Atoms) ist, welcher aus dem Rekombinationsprozess gewonnen wird. Zum anderen übersteigt die Bindungsenergie des Moleküls die Falltiefe stets um zumindest eine Größenordnung, das heißt bei einer Kollision können alle beteiligten Teilchen die Falle verlassen.

Um die Auswirkung sekundärer Verluste für unsere Messung von $g_{th}^{(3)}/g_{BEC}^{(3)}$ abzuschätzen, simulieren wir für unsere Fallenfrequenzen und Teilchenzahlen 1000 Drei-Körperverluste für das BEC und das thermische Gas und berechnen für jedes Rekombinationsprodukt die aufintegrierte Dichte $\int_{\vec{\gamma}} n(\vec{\gamma}) d\vec{\gamma}$ entlang einer zufälligen Raumrichtung. Das Ergebnis ist in Abb.(5.2) als Verhältnis der (Primär+Sekundär-) Verluste $(3 + \alpha_{th})/(3 + \alpha_{BEC})$ dargestellt. Man erkennt, dass die Anzahl sekundärer Verluste

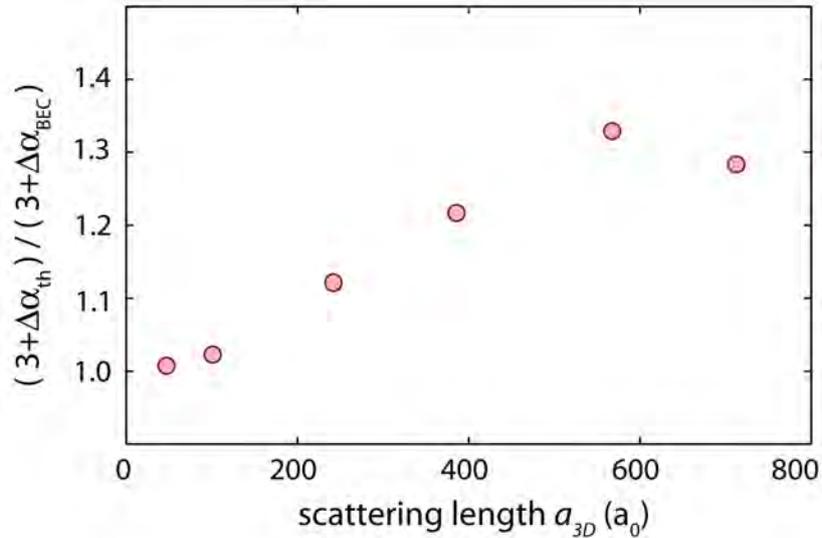


Abbildung 5.2: **Sekundärer Verlust:** Das Verhältnis $(3 + \alpha_{therm}) / (3 + \alpha_{BEC})$ als Funktion der Streulänge a_{3D} vergleicht sekundäre Verluste für das BEC und das thermische Gas für unsere experimentellen Parameter. Sekundäre Verluste treten in der thermischen Wolke häufiger auf als im BEC, da sie aus typischerweise dreimal mehr Atomen besteht und deshalb die Stoßwahrscheinlichkeit größer ist.

$\alpha = \sigma \langle \int_{\vec{\gamma}} n(\vec{\gamma}) d\vec{\gamma} \rangle$ im thermischen Gas größer als für das BEC ist, und für zunehmende Streulängen ebenfalls ansteigt. Dies würde zu einem Anstieg des mit unserer Methode gemessenen Verhältnisses $g_{therm}^{(3)} / g_{BEC}^{(3)}$ führen, und nicht zu einer Reduktion, wie wir in unserem Experiment zeigen konnten.

Die Punkte sind auch als eine obere Schranke für den systematischen Fehler in Abb.(5.1) zu interpretieren.

Zusammenfassung

In 3D Geometrie konnte wir ein Anwachsen der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g_{3D}^{(3)}$ gemäß Vorhersagen zeigen, und somit den ersten Bogoliubov-Korrekturterm überprüfen. Dieser entspricht dem nicht-kondensierten Anteil des wechselwirkenden BEC und spiegelt sich in vielen Größen wieder, wie dessen Grundzustandsenergie oder chemischen Potentials.

Wir nützen dabei die Eigenschaft, dass der Korrekturterm in $g_{3D}^{(3)}$ im Gegensatz zu eben erwähnten, thermodynamischen Größen verstärkt auftritt, und somit für eine Messung einfacher zugänglich ist. Es konnte außerdem ausgeschlossen werden, dass der beobachtete Effekt durch sekundäre Verluste zustande kommt.

5.4 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 1D

Für die Bestimmung der Korrelationsfunktion $g_{1D}^{(3)}$ des eindimensionalen wechselwirkenden Bosegases bestimmen wir den Faktor $3K^{(3)}g^{(3)}$ für verschiedene Streulängen jeweils für ein BEC in ein 1D und 3D Geometrie. Hier ist es nicht mehr offensichtlich, dass die Drei-Teilchen Physik (und somit $K^{(3)}$) nicht durch den starken transversalen Einschluss ω_{\perp} unseres 1D Systems beeinflusst wird. Ist jedoch die Größe des Dimers und die Ausdehnung des Streuprozesses, welche beide mit der Streulänge a_{3D} skalieren, klein gegenüber dem transversale Einschluss $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(m\omega_{\perp})} \approx 1500a_0$, liegt es nahe anzunehmen, dass $K_{1D}^{(3)} \approx K_{3D}^{(3)}$.

In 3D führen eine Verlustmessung (analog zu Kap.(5.3)) in einer gekreuzten Dipolfalle durch, mit Fallenfrequenzen $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (10.5(8), 17.4(1), 13.9(1))$ Hz. Die Messdaten für die Verlustkoeffizienten $3K_{3D}^{(3)}g_{3D}^{(3)}$ bei verschiedenen Streulängen sind in Abb.(5.5) angeführt.

Für die 1D Messung laden wir ein BEC, bestehend aus typischerweise $8 \cdot 10^4$ Atomen, in 400 ms in das 2D-optische Gitter mit Gitterabstand $d = \lambda/2$ und Laser-Wellenlänge $\lambda = 1064\text{nm}$. Jede der somit erhaltenen 4000-6000 parallelen Röhren stellt ein individuelles 1D System dar, mit transversaler Fallenfrequenz $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 12200(500)$ Hz und Aspect-Verhältnis $\omega_{\perp}/\omega_z \approx 800$ (siehe Abb. (5.3)(a)). Beim Einladen ist die Streulänge auf $102 a_0$ bzw. $191 a_0$ eingestellt, je nachdem, ob man anschließend eine Messung bei Streulängen links bzw. rechts der Feshbach-Resonanz (bei ~ 20 Gauss) durchführen möchte. Denn ein Kreuzen der Resonanz während des Einstellens des gewünschten Magnetfeldes würde zu großen Verlusten führen.

Wir stellen die Streulänge a_{3D} in 100 ms auf ihren gewünschten Wert, fahren anschließend nach variabler Haltezeit das Gitter wieder in 0.4 ms herunter, um letztlich die Teilchenzahl $N(t)$ mit Absorptionbildern zu bestimmen. Typische Verlustkurven sind in Abb.(5.3)(c) zu sehen. Für das stark wechselwirkende Tonks-Gas ist eine deutliche Unterdrückung von Verlusten erkennbar, was sich zum einen durch die Reduktion von $g^{(3)}$ verstehen lässt, und zum anderen an der Verbreiterung des Dichteprofiles des Tonks-Gases liegt (Abb.3.9).

Temperaturabhängigkeit von $g^{(3)}$

Ein anderer interessanter, nicht gänzlich verstandener, Effekt geht aus der Verlustmessung hervor, dargestellt in Abb. 5.3(d). Im stark wechselwirkenden Bosegas beobachtet man nach längeren Haltezeiten ein plötzliches Einsetzen starker Verluste nach einer deterministischen Zeit t_c . Diese hängt stark vom Parameter γ ab. Der Zeitpunkt t_c lässt Rückschlüsse auf das Temperaturverhalten von $g_{1D}^{(3)}$ zu. Denn bei einer Streulänge von $a_{3D} = 568(3) a_0$ ist die kinetische Energie ($2\pi \cdot 85$ kHz) des bei der Rekombination entstandenen Teilchens nicht mehr wesentlich größer als die Fallentiefe $2\pi \cdot 45$ kHz. Deshalb kann es passieren, dass das Teilchen durch inelastische Stöße die Falle nicht mehr

5.4 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 1D

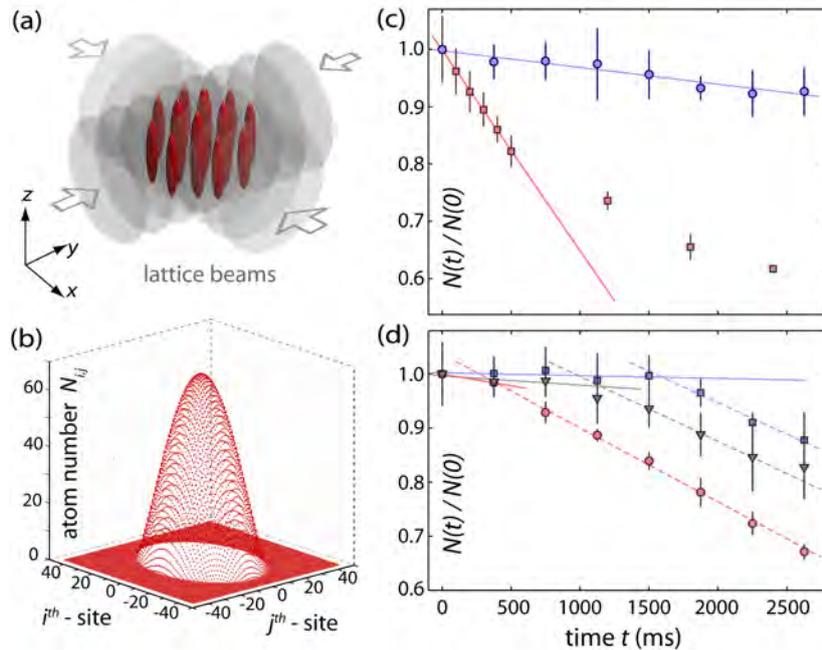


Abbildung 5.3: **Setup und Verlustmessung in 1D:** (a) Zwei Laserstrahlen bilden ein 2D-Gitterpotential für Cs Atome. Jeder Gitterplatz ist ein individuelles 1D System senkrecht zu den Laserstrahlen (Röhre). (b) Besetzung der Gitterplätze bzw. Röhren (i,j) aufgrund des globalen harmonischen Einschlusses. (c) Relative Teilchenzahl $N(t)/N(0)$ als Funktion der Zeit t in 1D für verschiedene Streulängen: $a_{3D} = 23(1)$ (rote Quadrate) und $a_{3D} = 568(3)$ ($\gamma = 20$) (blaue Kreise). Die anfängliche Steigung (durchgezogene Linien) wird für die Bestimmung von $g_{1D}^{(3)}$ herangezogen. (d) Relative Teilchenzahl $N(t)/N(0)$ als Funktion der Zeit t in 1D bei starker Wechselwirkung ($a_{3D} = 568(3)$) und verschiedenen Dichten und somit verschiedenen γ -Parametern: $\gamma = 12$ (rote Kreise), $\gamma = 13$ (schwarze Dreiecke) und $\gamma = 14$ (blaue Quadrate). Das plötzliche Abknicken der Verlustkurve zu einem Zeitpunkt t_c hängt stark von γ ab (Interpretation: siehe Text).

verlässt und das System somit aufheizt. Somit ist das Verhalten von $g_{1D}^{(3)}$ als Funktion der Temperatur zu berücksichtigen [Kor11]. Denn ähnlich wie für das 3D BEC nimmt der Wert von $g_{1D}^{(3)}$ mit der Temperatur zu. Dies führt zu erhöhten Verlusten, wodurch sich das System noch stärker aufheizt, was wiederum den Wert von $g_{1D}^{(3)}$ erhöht, usw.. Dieser sich selbst verstärkende Kreislauf kann auch in einer Simulation beobachtet werden, in der man für jeden Verlustprozess denselben Temperaturanstieg annimmt. Qualitativ kann das beobachtete Abknicken der Verlustkurve mit dem Verhalten von $g_{1D}^{(3)}$ mit der Temperatur somit verstanden werden. Für fixes T und γ kann $g_{1D}^{(3)}(T, \gamma)$ numerisch (recht aufwendig) berechnet werden. Unsere Messung zielt primär auf die Messung von $g_{1D}^{(3)}$ für den Fall $T = 0$. Somit wurde auf eine ausführliche Datenanalyse, mit Berücksichtigung der Temperatur-Abhängigkeit von $g_{1D}^{(3)}$, verzichtet.

Dichteprofile in 1D

In 1D Geometrie gestaltet sich die Bestimmung von $K_{1D}^{(3)}g_{1D}^{(3)}$ insofern viel aufwendiger, als dass sich die gemessenen Verluste auf alle Atome aus tausenden Röhren (i, j) beziehen, also

$$3K_{1D}^{(3)}g_{1D}^{(3)} = -\frac{\dot{N}(0)}{\sum_{i,j} \int n_{ij}^3(\mathbf{r}, 0) d^3r}. \quad (5.5)$$

Für die Berechnung der Dichteprofile und anschließend $\sum_{i,j} \int n_{ij}^3(\mathbf{r}) d^3r$ benötigen wir als erstes die genaue Verteilung der Atome pro Röhre $N_{i,j}$. Diese wird durch den globalen harmonischen Einschluss bestimmt, für welchen wir zwei verschiedene Einstellungen wählen: $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (9.7(2), 11.4(2), 14.5(1))$ Hz und $2\pi \times (13.1(2), 17.7(2), 17.5(2))$ Hz. Das chemische Potential im Zentrum einer Röhre $\mu_{i,j}$ ist dann gegeben durch

$$\mu_{i,j} = \mu - \frac{1}{2}m(\lambda/2)^2(\omega_x^2 i^2 + \omega_y^2 j^2),$$

mit λ der Wellenlänge des Lasers und μ dem globalen chemischen Potential. Beim adiabatischen Einladen des BEC ins Gitter sind fast alle Röhren im TF Regime. Dann steht die Teilchenzahl $N_{i,j}$ mit dem chemisches Potential in einer Röhre in folgendem Verhältnis

$$\mu_{i,j} = \left(\frac{3N_{i,j}}{4\sqrt{2}} g_{1D} \omega_z \sqrt{m} \right)^{2/3},$$

mit der eindimensionale Kopplungskonstante g_{1D} , gegeben durch Gl. (3.35). Mit der Normierungsbedingung $N = \sum_{i,j} N_{i,j}(\mu)$ kann dann die Besetzung der Röhren numerisch berechnet werden. Eine typische Verteilung ist in Abb.5.3(b) dargestellt mit ca. 60 Atomen pro Röhre im Zentrum der Falle.

Für gegebene Streulänge a_{3D} , Fallenfrequenzen und Gesamtatomzahl kann nun mit $N_{i,j}$ das Dichteprofil $n_{i,j}(\mathbf{r}) = n_{i,j}^\perp(x, y) n_{i,j}^z(z)$ in jeder Röhre berechnet werden. Die unterschiedlichen Dichteprofile für die verschiedenen Wechselwirkungsbereiche wurden schon in Kapitel (3.2.1) ausführlich erläutert, als auch deren numerische Berechnung. Bei der Berechnung des Integrals $\int n_{ij}^3(\mathbf{r}) d^3r$ ist es wichtig die Integration über den radialen gaußschen Grundzustand auszuführen, denn

$$\int dx dy [n_{i,j}^\perp]^3(x, y) = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{m\omega_\perp}{\hbar} \right)^2.$$

Die Berechnung von $\int n_{i,j}^3(\mathbf{r}) d^3r$ für eine Röhre mit 15 Teilchen ist in Abb. 5.4 dargestellt. Gauss-und Tonksprofil zeigen keine a_{3D} -Abhängigkeit. Die numerischen Berechnungen für das schwach bzw. stark wechselwirkende Gas (punkt-strichliert bzw. strichliert) gehen im Zwischenbereich ineinander über. Der Grund für das Abknicken der TF Lösung bei großen a_{3D} liegt in Olshanii's Korrekturterm (3.35).

5.4 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 1D

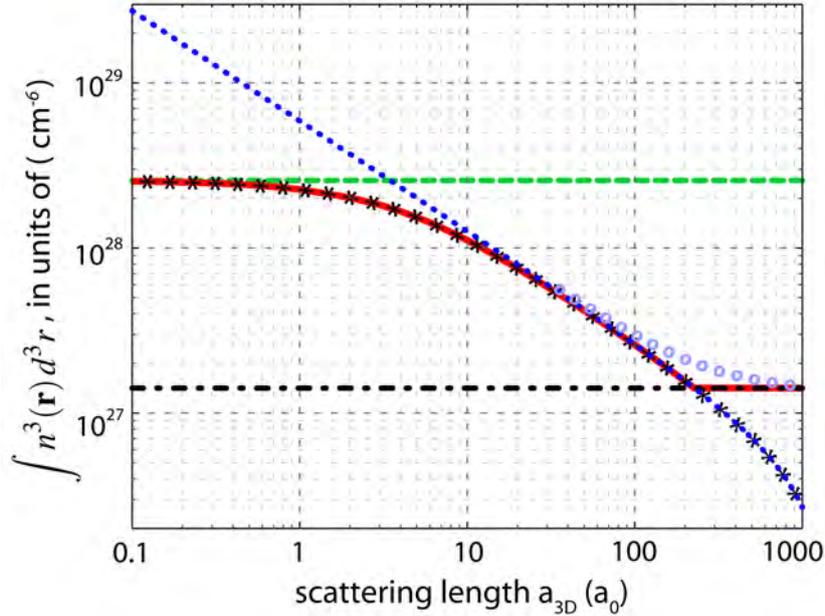


Abbildung 5.4: Die Größe $\int n_{i,j}^3(\mathbf{r}) d^3r$ für 15 Cs Atome und die gegebenen Fallenparameter unseres Experimentes, dargestellt als Funktion der Streulänge a_{3D} . Die verschiedenen Kurven entsprechen unterschiedlichen Näherungen: Gaußsche Lösung (grün strichlierte Linie), TG (schwarz punkt-strichliert Linie), TF Profil (blau punktierte Linie), numerische Resultate für die Lösung der GP-Gleichung (schwarze Sterne) und des Lieb-Liniger-Modells in LDA (blaue Kreischen). Für die Analyse der Messdaten wurde die rot durchgezogene Linie verwendet.

Bestimmung von γ

Unser Ziel ist es $g_{1D}^{(3)}(\gamma)$ als Funktion des Lieb-Liniger Parameters $\gamma = mg_{1D}/\hbar^2 n^z$ zu bestimmen. Dieser ist eine Funktion der 1D Dichte $n_{i,j}^z(z)$ und somit unterschiedlich für verschiedene Röhren und z-Koordinaten. Einer einzelnen Röhre kann ein mittleres $\bar{\gamma}_{i,j}$ zugeordnet werden

$$\bar{\gamma}_{i,j} = \frac{\int_{-R}^R dz \gamma_{i,j}(z) n_{i,j}^z(z)}{\int_{-R}^R dz n_{i,j}^z(z)} = \gamma_{i,j}^0 \frac{\int_{-R}^R dz n_{i,j}^z(0)}{\int_{-R}^R dz n_{i,j}^z(z)},$$

wobei R der Radius des 1D Dichteprofiles ist und im allgemeinen zwischen dem TF-Radius Z_{TF} und dem TG-Radius Z_{TG} liegt, und $\gamma_{i,j}^0$ der Lieb-Liniger Parameter im Zentrum der Röhre (minimales γ) ist. Für das TF (bzw. TG)-Profil ergibt sich $\bar{\gamma}_{i,j} = 1.5\gamma_{i,j}^0$ (bzw. $1.27\gamma_{i,j}^0$).

Wir definieren das gemittelte $\bar{\gamma}$ des Gesamtsystems über die zentralen Parameter $\gamma_{i,j}^0$ in allen Röhren (i,j)

$$\gamma \equiv \bar{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} N_{i,j} \gamma_{i,j}^0,$$

5 Messung der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion

und nehmen den Faktor $1.5\bar{\gamma}$ (bzw. $1.27\bar{\gamma}$) als Fehler in Richtung zunehmender $\bar{\gamma}$.

Resultate in 1D

Abb.(5.5) zeigt für starke Wechselwirkung eine Unterdrückung des Verlustkoeffizienten $K^{(3)}g^{(3)}$ des eindimensionalen Bosegases gegenüber seinem dreidimensionalen Pendant um drei Größenordnungen. Dies ist auf das γ^{-6} -Verhalten von $g_{1D}^{(3)}$ zurückzuführen. Die Messung von $g_{1D}^{(3)}$ stimmt über den gesamten Wechselwirkungsbereich gut mit den Berechnungen aus [Che06, Gan03] überein. Die Lücke an Messpunkten in einem Bereich um ca. $150 a_0$ ergibt sich aus der Anwesenheit einer schmalen Feshbach-Resonanz an dieser Stelle. Die großen Fehlerkreuze in 1D bei hohen Streulängen a_{3D} rühren aus folgendem Problem her: Da anfängliche Steigung der Verlustkurve $\dot{N}(0)$ ist aufgrund der Unterdrückung von Verlusten sehr flach (Abb. 5.3) und gleichzeitig steht uns wegen des bereits erwähnten Abknicken der Verlustkurve nur ein begrenzter Zeitraum für die Bestimmung von $\dot{N}(0)$ zur Verfügung. Daher kann eine horizontale Steigung ($\dot{N}(0) = 0$) in diesem Regime im Fehler des Fits von $\dot{N}(0)$ liegen, und somit können auch die Fehlerkreuze von $K^{(3)}g^{(3)}$ und in der Folge $g_{1D}^{(3)}$ bis 0 reichen.

5.4 Messung der Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ in 1D

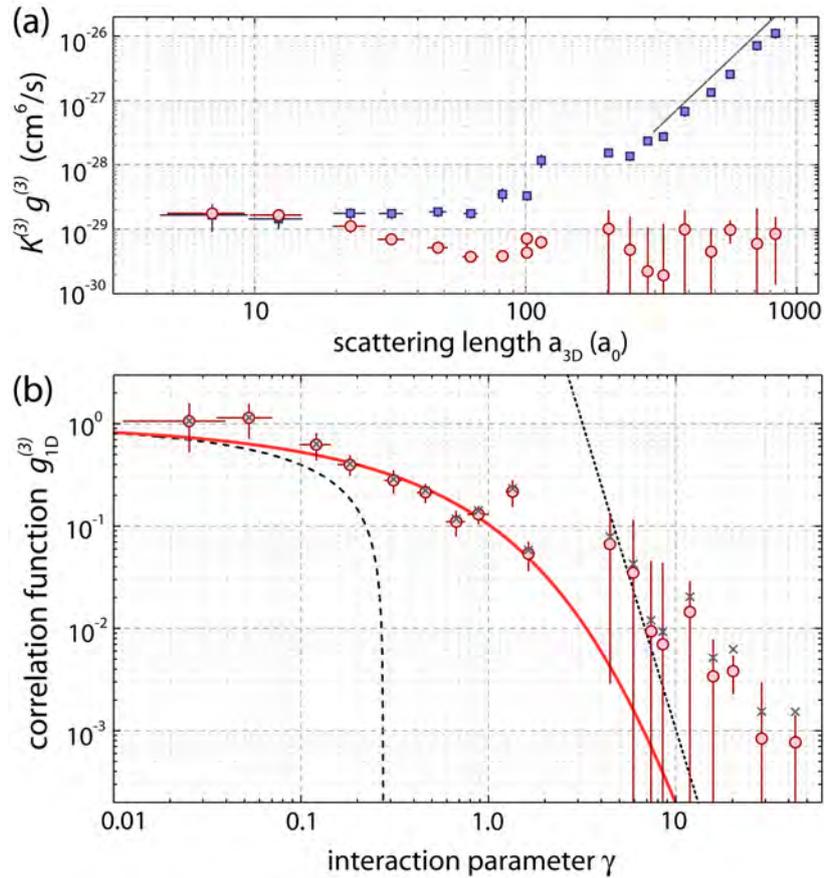


Abbildung 5.5: **(a):** Verlustkoeffizient $3K_{3D}^{(3)}g_{3D}^{(3)}$ als Funktion der Streulänge a_{3D} für ein entartetes Quantengas in 3D (blaue Quadrate) und 1D (rote Kreise). Die graue Linie verdeutlicht das $\sim a_{3D}^4$ Verhalten im universellen Regime. In 1D sieht man deutlich die Unterdrückung von Verlusten. **(b):** Die Korrelationsfunktion $g_{1D}^{(3)}$ als Funktion von γ . Unsere Messung (rote Kreise) zeigt eine Unterdrückung von $g_{1D}^{(3)}$ um fast drei Größenordnungen. Die grauen Kreuze sind die Ergebnisse für $g_{1D}^{(3)}$, wenn man den Korrekturterm für das 3D BEC (Gl.5.4) berücksichtigt. Die rote Linie folgt der Berechnung von $g_{1D}^{(3)}$ aus [Che06]. Die strichlierten bzw. punktierten Linien folgen $g_{1D}^{(3)}$ in den Grenzfällen für $\gamma \ll 1$ bzw. $\gamma \gg 1$ [Gan03].

KAPITEL 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden die Eigenschaften des wechselwirkenden, eindimensionalen Bosegases untersucht. Als besonders effizient erweisen sich hierfür Korrelationsfunktionen, welche den Einfluss von Wechselwirkung als Funktion der Wechselwirkungsstärke wiedergeben. Mit unserem experimentellen Aufbau wurde über Verlustmessungen die lokale Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ über einen Wechselwirkungsbereich bestimmt, welcher vom nicht wechselwirkenden Bosegas bis hin zum stark wechselwirkenden Tonks-Gas reicht. Unsere Messdaten für die Drei-Körper-Korrelationsfunktion sind in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen aus dem Lieb-Liniger Modell [Che06].

Drei-Körper-Verluste stellen bei der Untersuchung von Vielteilchenphysik im stark wechselwirkenden Bosegas üblicherweise einen unerwünschten Prozess dar. Einerseits weil starke Drei-Körper-Verluste mit dem Verlassen des (eigentlich zu untersuchenden) stark wechselwirkenden Regimes einhergeht. Andererseits geht ein Teil der freiwerdenden Bindungsenergie des gebildeten Dimers durch Stöße der Rekombinationsprodukte dissipativ in das System über, und eine Erwärmung der Probe tritt ein. Für das Tonks-Gas konnten wir im Vergleich zum dreidimensionalen Bosegas eine starke Unterdrückung von Drei-Körper-Verlusten (um bis zu drei Größenordnungen) messen. Dies ist als Konsequenz der starken Korrelation im System zu interpretieren. Bei der Messung gewisser Vielteilcheneffekte bietet sich daher das Tonks-Gas als Alternative zum einkomponentigen Fermigas an, in welchem Verluste durch das Pauliprinzip unterdrückt sind.

Im dreidimensionalen Bosegas wurde ein Anwachsen der lokalen Drei-Körper-Korrelationsfunktion $g^{(3)}$ mit dem Gasparameter gemessen. Für starke Wechselwirkung konnten wir eine Änderung von $g^{(3)}$ um den Faktor 2 im Vergleich zum nichtwechselwirkenden Bosegas feststellen. Die Messdaten bestätigen die zu erwartenden Bogoliubov-Korrekturen für $g^{(3)}$ [Kag85].

Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit berechnet relevante physikalische Größen des eindimensionalen Bosegases aus dem zugrundeliegenden Lieb-Liniger Modell. Dies geschieht über die numerische Lösung eines Systems von Integralgleichungen, aus denen unter anderem Energie, chemisches Potential, Dichteprofile und Korrelationsfunktionen für beliebige Werte des Parameters γ berechnet wurden.

Im Hinblick auf weiterführende Experimente, welche Transporteigenschaften eines Fremdtteilchens durch eine 1D-Röhre untersuchen sollen, wurde das Anregungsspek-

6 Zusammenfassung und Ausblick

trum des 1D Bosegases berechnet und des Weiteren ein Programm erstellt, welches den Luttinger-Parameter K als Funktion des LL-Parameters γ angibt.

Bisherige Untersuchungen von eindimensionalen Quantengasen in optischen Gittern beschränkten sich auf, über tausende 1D-Röhren gemittelte, Messgrößen. So ist in dieser Arbeit zumeist der Gesamtteilchenverlust aus der Probe die verwendete Observable. Bei Transport-Experimenten kann nur die Schwerpunktbewegung der Fremtteilchen in allen Röhren gleichzeitig gemessen werden. Wesentliche Vorteile gegenüber herkömmlichen Absorptionsabbildungen bringt die Quantengas-Mikroskopie mit sich [Bak09, She10]. Mittels hochauflösenden Bildern können dabei (teilweise in Kombination mit Computeralgorithmen) einzelne Gitterplätze bzw. Teilchen aufgelöst werden, was die Beobachtung von Quanteneffekten natürlich enorm erleichtert. Daher ist der Umbau des derzeitigen Experiment-Aufbaus hinzu einem Quantengas-Mikroskop ein wesentliches Ziel, mit der Hoffnung die bemerkenswerten Eigenschaften stark korrelierter Quantensysteme in Zukunft auch „sehen“ zu können.

ANHANG A**Veröffentlichung im Rahmen dieser Diplomarbeit****Three-body correlation functions and recombination rates for
bosons in three and one dimensions**

**E. Haller, M. Rabie, M.J. Mark, J.G. Danzl, R. Hart, K. Lauber, G. Pupillo and
H.-C. Nägerl**

accepted by Phys. Rev. Lett. (2011)

Three-body correlation functions and recombination rates for bosons in three and one dimensions

E. Haller,^{1,2} M. Rabie,¹ M.J. Mark,¹ J.G. Danzl,¹ R. Hart,¹ K. Lauber,¹ G. Pupillo,^{2,3} and H.-C. Nägerl¹

¹*Institut für Experimentalphysik und Zentrum für Quantenphysik, Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck, Austria*

²*Institut für Quantenoptik und Quanteninformation, Österreichische Akademie der Wissenschaften, 6020 Innsbruck, Austria*

³*Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck, Austria*

(Dated: July 25, 2011)

We investigate local three-body correlations for bosonic particles in three and one dimensions as a function of the interaction strength. The three-body correlation function $g^{(3)}$ is determined by measuring the three-body recombination rate in an ultracold gas of Cs atoms. In three dimensions, we measure the dependence of $g^{(3)}$ on the gas parameter in a BEC, finding good agreement with the theoretical prediction accounting for beyond-mean-field effects. In one dimension, we observe a reduction of $g^{(3)}$ by several orders of magnitude upon increasing interactions from the weakly interacting BEC to the strongly interacting Tonks-Girardeau regime, in good agreement with predictions from the Lieb-Liniger model for all strengths of interaction.

PACS numbers: 03.75.Hh, 67.10.Ba, 05.30.Jp

Correlation functions reflect the non-classical nature of quantum many-body systems. They may be used to characterize the latter when quantities such as temperature, density, dimensionality, and particle statistics are varied in experiments. It is particularly instructive to monitor a system's correlation functions as the strength of particle interactions is tuned from weak to strong. A paradigm is given by an ensemble of bosons in one-dimensional (1D) geometry with contact interactions [1]: For weak repulsive interactions, in the zero-temperature limit, the system is a quasicondensate with essentially flat particle correlation functions in position space to all orders. For strong repulsive interactions, the bosons avoid each other, leading to loss of coherence and strong increase of local correlations. In the context of ultracold atomic gases, with exquisite control over temperature, density, and dimensionality [2], tuning of interactions is enabled by Feshbach resonances [3]. Local two- and three-body correlations in atomic many-body systems can be probed e.g. in measurements of photoassociation rates [4] and of three-body recombination processes [5, 6], respectively. Non-local two-body correlations for atomic matter waves have been measured in atom counting [7–10], noise-correlation [11–13], and in-situ imaging [14] experiments. Recently, also non-local three-body correlations have become accessible in experiments [15, 16].

Recombination processes are sensitive to the properties of the many-body wave function at short distances. In particular, the process of three-body recombination, in which three particles collide inelastically to form a dimer, is directly connected to the local three-particle correlation function $g^{(3)} \equiv \langle \hat{\psi}^\dagger(x)^3 \hat{\psi}(x)^3 \rangle / n^3$, which compares the probabilities of having three particles at the same position for a correlated and an uncorrelated system. Here, $\hat{\psi}^\dagger$ and $\hat{\psi}$ are atomic field operators and n is the density. The function $g^{(3)}$ depends strongly on quantum statistics [5, 16] and temperature [17, 18]. For example, in 3D geometry, statistics change the value of $g^{(3)}$ from zero for identical fermions to one for non-interacting classical particles and to six for thermal (non-condensed) bosons. For non-interacting bosons statistical bunching is suppressed in a Bose-Einstein condensate (BEC), for which $g^{(3)} = 1$. In

addition, interactions also have a pronounced effect on $g^{(3)}$: In a 3D BEC, quantum depletion due to quantum fluctuations reduces the condensate fraction by increasing the number of occupied single-particle modes. In this case, beyond-mean-field calculations [19] predict an increase of $g^{(3)}$ proportional to the square root of the gas parameter $(na_{3D}^3)^{1/2}$, where a_{3D} is the 3D s-wave scattering length. This increase of $g^{(3)}$ has never been seen experimentally and is in stark contrast to the behavior of 1D systems. In 1D geometry, bosons with repulsive interactions minimize their interaction energy by avoiding spatial overlap. For very strong repulsive interactions in the Tonks-Girardeau (TG) limit [1, 20–23] a strong reduction of $g^{(3)}$ with a γ^{-6} scaling is predicted [24]. Here, γ is the dimensionless Lieb-Liniger parameter, which characterizes interactions in a homogeneous 1D system [1, 25]. Recently, $g^{(3)}$ has been calculated all the way from the weakly to the strongly interacting 1D regime [26]. Experimentally, Laburthe Tolra *et al.* [6] have observed a reduction of $g^{(3)}$ by a factor of about 7(5) for a weakly interacting gas of Rb atoms with $\gamma = 0.45$.

In this work we experimentally determine $g^{(3)}$ in 3D and in 1D geometry using a trapped ultracold gas of Cs atoms with tunable (repulsive) interactions. For a BEC in 3D geometry we find clear evidence for an increase of $g^{(3)}$ with increasing interaction strength, in good agreement with the prediction of Ref. [19]. In 1D, for which we can tune γ from zero to above 100 [23], we determine $g^{(3)}$ in the crossover regime from weak (1D BEC regime) to strong interactions (TG regime). Here our data agrees well with the prediction of Ref. [26]. For strong interactions in the TG regime, our measurements show that $g^{(3)}$ is suppressed by at least three orders of magnitude. For high densities and strong interactions, we observe a rather sudden increase of three-body losses after long hold times in the trap. Understanding the behavior of $g^{(3)}$ at short and long times is an important step towards understanding integrability and thermalization in 1D systems [27, 28].

A three-body loss process [3, 29] consists of the collision of three particles, the formation of a dimer, and the release of the dimer's binding energy typically sufficient to allow both, the dimer and the remaining particle, to escape from the trap. The

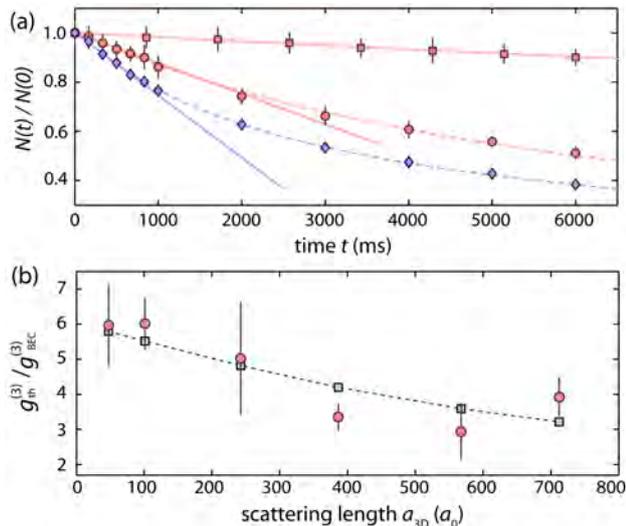


FIG. 1: (color online) (a) Relative atom number $N(t)/N(0)$ vs. hold time t in 3D geometry: BEC (squares and circles) and thermal gas (diamonds) for $a_{3D} = 101(2) a_0$, $386(3) a_0$, and $386(3) a_0$, respectively. The dashed lines are fits to the data based on the loss equation (see text). The solid lines are linear fits that include the data from 100% to 85%. (b) The ratio of correlation functions $g_{\text{th}}^{(3)}/g_{\text{BEC}}^{(3)}$ as a function of a_{3D} (experimental data: circles; prediction [19]: squares). All error bars reflect the 1σ statistical uncertainty.

loss, assuming negligible one- and two-body loss, is modeled by the rate equation $\dot{n} = -\alpha K^{(3)} g^{(3)} n^3$. Here, we have explicitly split the loss rate coefficient $\alpha K^{(3)} g^{(3)}$ into its three contributions. The parameter $\alpha = 3$ describes a situation where exactly three particles are lost in each recombination event. In principle, secondary losses [30] could modify its value. However, in the following we will be interested in *relative* measurements of $\alpha K^{(3)} g^{(3)}$, which are only weakly dependent on the precise value of α [25], allowing us to neglect a possible deviation of α from the value of 3. The parameter $K^{(3)}$ contains the effect of few-body physics on the loss process [3]. It depends on the probability of dimer formation (a process that can be strongly enhanced near Efimov resonances [31]) and generally varies strongly with a_{3D} [29, 32–35]. For a_{3D} much larger than the range of the scattering potential, $K^{(3)}$ shows a generic a_{3D}^4 scaling. Contributions of many-body physics are contained in the three-particle distribution function $g^{(3)} n^3$. In what follows, we aim to measure $g^{(3)}$ as a function of a_{3D} both in 3D and 1D geometry.

We determine $K^{(3)} g^{(3)}$ from measurements of the decay of the total number of atoms $N(t)$ in our trap [5, 35], which obeys the loss equation $\dot{N} = -3K^{(3)} g^{(3)} \int n^3(\mathbf{r}) d^3r$. Figures 1(a) and 2(c) show typical atom number measurements for 3D and 1D geometry. The data in 3D geometry is well fit by solutions to the loss equation. The determination of $K^{(3)} g^{(3)}$ depends critically on an exact knowledge of the atomic density profile $n(\mathbf{r})$. In particular, particle loss and loss-induced heating of the sample [35] can modify the density profile in a non-trivial

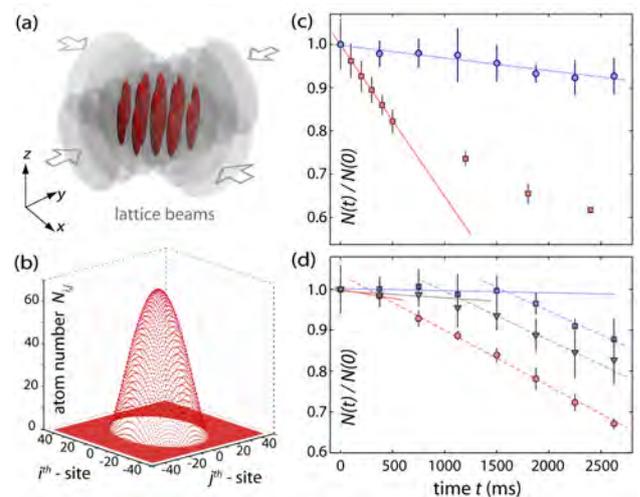


FIG. 2: (color online) (a) Sketch of the experimental setup: A 2D optical lattice traps atoms in an array of 1D tubes. (b) Example of a computed atom number distribution $N_{i,j}$ (see text). (c) The relative atom number $N(t)/N(0)$ as a function of time t in 1D geometry: squares and circles correspond to $a_{3D} = 23(1) a_0$ and $568(3) a_0$ with initial densities of $4.5 \mu\text{m}^{-3}$ and $1.7 \mu\text{m}^{-3}$ at the center of the center tube, respectively. The solid lines are linear fits to the initial slopes. (d) The relative atom number $N(t)/N(0)$ in 1D for fixed $a_{3D} = 568(3) a_0$ and for various values of γ as the 1D density is changed: $\gamma = 12$ (circles), $\gamma = 13$ (triangles), and $\gamma = 14$ (squares). The solid (dashed) lines are linear fits to the data points for short (large) times to guide the eye.

way. Also, on long time scales evaporative losses might start to play a role. To avoid these complications we restrict ourselves to short time intervals, during which not more than 15% of the atoms are lost, and we determine the slope $\dot{N}(0)$ from a linear fit to the data. We determine $\int n^3(\mathbf{r}) d^3r$ from a measurement of the total atom number N and the trap frequencies $\omega_{x,y,z}$ using interaction dependent models for $n(\mathbf{r})$ [25]. We find that the linear approximation underestimates $K^{(3)} g^{(3)}$ by approximately 12%, however, the data analysis is greatly simplified, especially in 1D. Finally, a comparative measurement of $K^{(3)} g^{(3)}$ allows us to eliminate $K^{(3)}$, as explained below, and to determine $g^{(3)}$ in 3D and 1D geometry.

Correlation function in 3D: We measure $K^{(3)} g^{(3)}$ for both a non-condensed thermal sample and a BEC as a function of a_{3D} . For the thermal sample we start with typically 3.5×10^5 Cs atoms at a temperature of $T \approx 200$ nK. The peak density is about $n_0 = 1 \times 10^{14} \text{cm}^{-3}$. In the BEC [35, 36] we have about 9×10^4 Cs atoms without any detectable non-condensed fraction at about $n_0 = 5 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$. We tune a_{3D} in the range from $50 a_0$ to $800 a_0$ by means of a broad magnetic Feshbach resonance [35, 37] (a_0 is Bohr's radius). The magnetic field gradient needed to levitate the atoms against gravity [35] introduces a slight (less than $5 a_0$) variation of a_{3D} across the samples. We determine N by means of absorption imaging after a variable hold time t and 50 ms of expansion in the presence of the levitation field. We note that we do not

observe the appearance of any non-condensed fraction in all measurements using the BEC. Figure 1(b) displays the ratio $K_{\text{th}}^{(3)} g_{\text{th}}^{(3)} / (K_{\text{BEC}}^{(3)} g_{\text{BEC}}^{(3)}) = g_{\text{th}}^{(3)} / g_{\text{BEC}}^{(3)}$ determined from the thermal sample and the BEC as a function of $a_{3\text{D}}$. Here we have made the reasonable assumption that $K^{(3)}$ is independent of the system's phase in 3D geometry, i.e. $K_{\text{th}}^{(3)} = K_{\text{BEC}}^{(3)}$. Our measurement shows that the ratio $g_{\text{th}}^{(3)} / g_{\text{BEC}}^{(3)}$ attains the expected value of 6 for weak interactions [5], but then exhibits a pronounced decrease as $a_{3\text{D}}$ is increased. For comparison, we plot the prediction of Ref. [19]

$$g_{\text{th}}^{(3)} / g_{\text{BEC}}^{(3)} = 6 / \left(1 + \frac{64}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n_0 a_{3\text{D}}^3} \right). \quad (1)$$

We note that the density n_0 enters into this equation as a measured quantity. In general, we find good agreement between the experimental and the theoretical result, establishing our measurement as a clear demonstration of beyond mean-field effects on $g^{(3)}$ in 3D bosonic quantum gases.

Correlation function in 1D: Figure 2 (a) illustrates our experimental setup to generate an array of 1D systems. We load a BEC of typically 8×10^4 atoms within 400 ms into approximately 5000 vertically (z -direction) oriented tubes that are formed by two horizontally propagating, retro-reflected lattice laser beams. Each tube with index (i, j) in the x - y -plane has a transversal trapping frequency of $\omega_{\perp} = 2\pi \times 12.2(5)$ kHz and an aspect ratio $\omega_{\perp} / \omega_z$ of approximately 800. The transversal motion of the atoms in the tubes is effectively frozen out as kinetic and interaction energy are much smaller than $\hbar\omega_{\perp}$. We adjust $a_{3\text{D}}$ in 100 ms to its final value. After time t we turn off the lattice potential and determine the total atom number $N(t)$ by absorption imaging in a time-of-flight measurement. In order to determine $g_{1\text{D}}^{(3)}$ we calculate the ratio $K_{1\text{D}}^{(3)} g_{1\text{D}}^{(3)} / (K_{3\text{D}}^{(3)} g_{3\text{D}}^{(3)}) = g_{1\text{D}}^{(3)} / g_{3\text{D}}^{(3)}$. Here, it is not obvious that few-body physics is not affected by the confinement and that hence $K_{1\text{D}}^{(3)}$ and $K_{3\text{D}}^{(3)}$ cancel each other. Nevertheless, it is reasonable to assume that $K^{(3)}$ is not significantly changed by the confinement as long as the confinement length $a_{\perp} = \sqrt{\hbar / (m\omega_{\perp})}$ is larger than the extent of the dimer produced in the recombination event and the range of the scattering process, which are both of order of $a_{3\text{D}}$. Here, m is the atom mass. We choose a moderately deep lattice potential with $a_{\perp} \approx 1500 a_0$ and restrict $a_{3\text{D}}$ to $a_{3\text{D}} \lesssim 800 a_0$. In particular, we avoid the confinement-induced resonance condition $a_{3\text{D}} \approx a_{\perp}$ [23, 38].

The main difficulty in the determination of $K_{1\text{D}}^{(3)} g_{1\text{D}}^{(3)}$ comes from the fact that the initial atom number of the tubes varies across the lattice as a result of the harmonic confinement. We choose to always load the lattice in a regime of weak repulsive interactions such that almost all 1D samples are initially in the 1D Thomas-Fermi (TF) regime [39]. The local chemical potentials $\mu_{i,j}$, the total atom number N , and the chemical potential μ are then unambiguously related, and we can directly calculate the initial occupation number $N_{i,j}$ for each tube (i, j) ([25] and Fig. 2(b)). The variation in $N_{i,j}$ results in a considerable variation in the type of density profile for each of the 1D

systems after the strength of interactions is increased to the desired value: Some tubes remain in the 1D TF regime, while others are now in the TG regime. For tubes that are in the weakly interacting regime we determine the 1D density $n_{1\text{D}}$ numerically by solving the 1D Gross-Pitaevskii equation. For the TG regime the density profiles are determined following Ref. [39]. In general, we find good agreement when we compare the numerical results to integrated density distributions from in-situ absorption images. For the interaction parameter γ we take a mean value that is calculated as an average over all local $\gamma_{i,j}$ at the center of each tube (i, j) weighted by $N_{i,j}$ [25].

As before we determine $K_{1\text{D}}^{(3)} g_{1\text{D}}^{(3)}$ from the initial slope of the loss curve as shown in Fig. 2(c). In Fig. 3(a) we compare the data that we obtain in 1D geometry to our data for $K_{3\text{D}}^{(3)} g_{3\text{D}}^{(3)}$ for a 3D-BEC as we vary $a_{3\text{D}}$. We note that the BEC data is in good agreement with previous three-body loss data on thermal samples when one takes into account the combinatorial factor $3! = 6$ [31, 35]. In particular, the 3D data follows the universal scaling law $K^{(3)} \sim a_{3\text{D}}^4$ for sufficiently large $a_{3\text{D}}$ [29, 32–35]. We exclude data points affected by the presence of a narrow Feshbach resonance in the vicinity of $a_{3\text{D}} = 150a_0$ [40]. Note that in the range from $a_{3\text{D}} \approx 10a_0$ to $a_{3\text{D}} \approx 850a_0$ three-body losses in 3D increase by nearly 3 orders of magnitude. This behavior is in stark contrast to the measurements in 1D. In 1D, we observe a *reduction* of $K^{(3)} g^{(3)}$ by approximately a factor of 2 upon increasing $a_{3\text{D}}$ over the same range of values. In fact, for $a_{3\text{D}} \geq 200a_0$ our measurement only gives an upper bound on $K_{1\text{D}}^{(3)} g_{1\text{D}}^{(3)}$ as losses become so small that we have difficulty in determining $\dot{N}(0)$. Note that tunneling between tubes (on a timescale of 1 s for the parameters of our lattice) sets an upper bound for the timescale for which the tubes can be considered to be independent and hence fully in the 1D regime.

In Fig. 3(b) we plot $K_{1\text{D}}^{(3)} g_{1\text{D}}^{(3)} / (K_{3\text{D}}^{(3)} g_{3\text{D}}^{(3)}) \approx g_{1\text{D}}^{(3)}$ as a function of γ . A striking decrease by 3 orders of magnitude from the value 1 at $\gamma \approx 0.03$ to 10^{-3} at $\gamma \approx 50$ can be seen. We compare this result to the predictions based on the Lieb-Liniger model of interacting bosons in 1D: In the weakly interacting Gross-Pitaevskii regime ($\gamma \ll 1$) the Bogoliubov approach yields $g^{(3)}(\gamma) \simeq 1 - 6\sqrt{\gamma}/\pi$, while in the TG regime, $\gamma \gg 1$, $g^{(3)}$ can be expressed through derivatives of the three-body correlation function of free fermions, giving $g^{(3)} = 16\pi^6 / (15\gamma^6)$ [24]. Cheianov *et al.* [26] have recently calculated numerically $g^{(3)}$ for all strengths of interactions within the Lieb-Liniger model, providing an interpolation between the weakly and strongly interacting limits (red continuous line in Fig. 3(b)). We find very good agreement between the result of our experiment and the theory that is valid for all strengths of interactions. This is the central result of this work.

Finally, for large values of $a_{3\text{D}}$ and n_0 , and for long hold times in 1D geometry, we find a surprisingly sudden increase of losses as shown in Fig. 2(d), accompanied by a rapid increase for the expansion energy in the longitudinal direction (data not shown). The onset of increased losses shifts to later

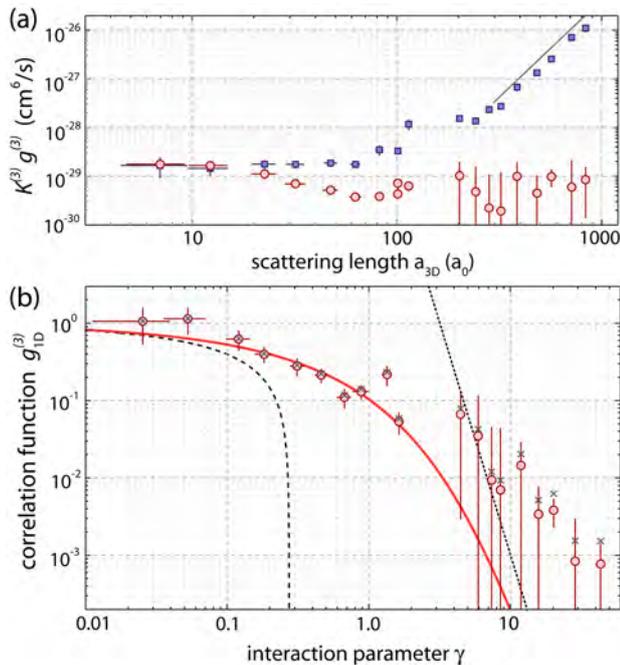


FIG. 3: (color online) (a) Three-body loss coefficient $K^{(3)}g^{(3)}$ vs. a_{3D} for a quantum degenerate gas in 3D (squares) and in 1D (circles). The line gives the $K^{(3)} = Cha_{3D}^4/m$ scaling in the universal regime in 3D with $C = 67.9$ [29, 32–35]. The error bars of $K^{(3)}g^{(3)}$ reflect the 1σ statistical uncertainty of the linear fit. (b) The measured correlation function $g_{1D}^{(3)}$ vs. γ in 1D geometry (circles). The crosses indicate the values for $g_{1D}^{(3)}$ corrected for the variations of $g_{3D}^{(3)}$ with a_{3D} as in Eq. (1) (see text). The dashed and dotted lines are approximate analytical solutions for $\gamma \ll 1$ and $\gamma \gg 1$ from Ref. [24]. The solid line is the prediction from Ref. [26].

times with decreased density in the tubes, i.e. increased γ , and it is rather sensitive to the precise value of γ . We believe that the 1D tubes suffer from a recombination-heating induced breakdown of correlations: For sufficiently large values of a_{3D} the binding energy of the weakly bound dimer produced in the recombination process becomes comparable to the trap depth (here $h \times 45$ kHz). This leads to a positive feedback cycle in the many-body system in which three-body losses lead to an increase of temperature [35] and thus of $g^{(3)}$ [17], which in turn increases three-body losses.

In summary, we have measured the local value $g^{(3)}$ for the three-particle correlation function for quantum degenerate gases in 3D and 1D. In 3D, increasing interactions deplete the condensate and increase the value of $g^{(3)}$ in accordance with beyond mean-field calculations. In 1D, we observe a strong suppression for $g^{(3)}$ by 3 orders of magnitude as the TG regime is entered. The accompanying suppression of three-body losses is crucial to the study of strongly interacting matter in and out of equilibrium in 1D [23, 27, 28, 41].

We thank R. Grimm for generous support. We gratefully acknowledge funding by the Austrian Science Fund (FWF) within project I153-N16 and within the framework of the Eu-

ropean Science Foundation (ESF) EuroQUASAR collective research project QuDeGPM. GP acknowledges funding from the EU through NAME-QUAM and AQUATE.

-
- [1] M.A. Cazalilla *et al.*, arXiv:1101.5337.
[2] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
[3] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
[4] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. Weiss, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 190406 (2005).
[5] E. Burt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
[6] B. Laburthe Tolra, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2004).
[7] M. Yasuda and F. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).
[8] A. Öttl, S. Ritter, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
[9] M. Schellekens *et al.*, *Science* **310**, 648 (2005).
[10] T. Jelte *et al.*, *Nature* **445**, 402 (2007).
[11] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
[12] S. Fölling *et al.*, *Nature* **434**, 481 (2005).
[13] T. Rom *et al.*, *Nature* **444**, 733 (2006).
[14] T. Jacqmin *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 230405 (2011).
[15] J. Armijo, T. Jacqmin, K. Kheruntsyan, and I. Bouchoule, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 230402 (2010).
[16] S.S. Hodgman *et al.*, *Science* **331**, 1046 (2011).
[17] K. Kheruntsyan, D. Gangardt, P. Drummond, and G. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040403 (2003).
[18] M. Kormos, G. Mussardo, and A. Trombettoni, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210404 (2009).
[19] Yu. Kagan, B.V. Svistunov, and G.V. Shlyapnikov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **42**, 169-172 (1985).
[20] M. Girardeau, *J. Math. Phys.* **1**, 516 (1960).
[21] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *Science* **305**, 1125 (2004).
[22] B. Paredes *et al.*, *Nature* **429**, 277 (2004).
[23] E. Haller *et al.*, *Science* **325**, 1224 (2009).
[24] D. Gangardt and G. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 010401 (2003).
[25] See Supplemental Material at (URL will be inserted by publisher).
[26] V.V. Cheianov, H. Smith, and M.B. Zvonarev, *JSTAT* **8**, P08015 (2006).
[27] T. Kinoshita, T. Wenger, and D.S. Weiss, *Nature* **440**, 900 (2006).
[28] S. Hofferberth *et al.*, *Nature Phys.* **4**, 489 (2008).
[29] P.O. Fedichev, M.W. Reynolds, and G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2921 (1996).
[30] M. Zaccanti *et al.*, *Nature Phys.* **5**, 586 (2009).
[31] T. Kraemer *et al.*, *Nature* **440**, 315 (2006).
[32] B. D. Esry, C. H. Greene, and J. P. Burke, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1751 (1999).
[33] E. Nielsen and J.H. Macek, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1566 (1999).
[34] P.F. Bedaque, E. Braaten, and H.-W. Hammer, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 908 (2000).
[35] T. Weber *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 123201 (2003).
[36] T. Kraemer *et al.*, *Appl. Phys. B* **79**, 1013 (2004).
[37] A.D. Lange *et al.*, *Phys. Rev. A* **79**, 013622 (2009).
[38] E. Haller *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 153203 (2010).
[39] C. Menotti and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).

- [40] M. Mark *et al.*, Phys. Rev. A **76**, 042514 (2007).
[41] E. Haller *et al.*, Nature **466**, 597 (2010).

SUPPLEMENTARY MATERIAL

Trap parameters

In 3D geometry, we measure the atom loss in a crossed beam dipole trap with one horizontal and one vertical laser beam. The horizontal trap-frequencies $\omega_{x,y}$ and the vertical trap-frequency ω_z vary for the different measurements. The data sets in Fig.1(a) are taken with trap frequencies $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (29(1), 80(2), 74(1))$ Hz for thermal atoms and with $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (11.8(1), 17.9(3), 13.5(1))$ Hz for a BEC. The data sets in Fig.3(a) are taken at trap frequencies of $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (10.5(8), 17.4(1), 13.9(1))$ Hz for a BEC.

In 1D geometry, we use a crossed dipole trap in addition to the 2D optical lattice potential to adjust the atom number distribution over the tubes. We choose two settings with global trap frequencies $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (9.7(2), 11.4(2), 14.5(1))$ Hz and $2\pi \times (13.1(2), 17.7(2), 17.5(2))$ Hz.

Atom number distribution over the tubes

We calculate the initial occupation number $N_{i,j}$ for tube (i, j) from the global chemical potential μ . For weak repulsive interactions during the loading process almost all tubes are in the 1D Thomas-Fermi (TF) regime with a local chemical potential $\mu_{i,j}$ at the center of each tube

$$\mu_{i,j} = \mu - \frac{1}{2}m(\lambda/2)^2(\omega_x^2 i^2 + \omega_y^2 j^2),$$

where m is the atomic mass and $\lambda = 1064.5$ nm is the wavelength of lattice light. We calculate μ from the condition $N = \sum_{i,j} N_{i,j}(\mu)$ with the $N_{i,j}$ given by [1]

$$\mu_{i,j} = \left(\frac{3N_{i,j}}{4\sqrt{2}} g_{1D} \omega_z \sqrt{m} \right)^{2/3},$$

where g_{1D} is the 1D coupling parameter [2]

$$g_{1D} = 2\hbar\omega_{\perp} a_{3D} \left(1 - 1.0326 \frac{a_{3D}}{a_{\perp}} \right)^{-1}.$$

Determination of γ

We determine the mean interaction parameter γ from the local parameters $\gamma_{i,j}$ at the center of each tube (i, j)

$$\gamma_{i,j} = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2 n_{i,j}^{1D}}, \quad \gamma = \frac{1}{N} \sum_{i,j} N_{i,j} \gamma_{i,j}.$$

Here, $n_{i,j}^{1D}$ is the 1D density at the center of the tube (i, j) . Note that this gives a lower estimate for γ . Averaging γ over the density profile along each tube gives a slightly larger γ by a factor 1.5 for a 1D TF density profile and a factor 1.27 for a TG density profile.

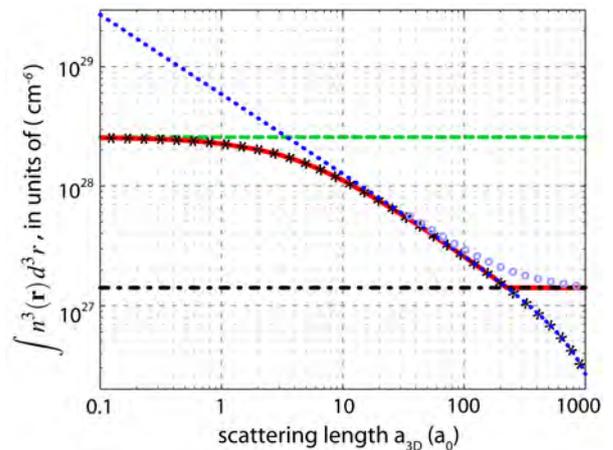


FIG. 4: (color online) The quantity $\int n_{i,j}^3(\mathbf{r}) d^3r$ for an occupation number $N_{i,j} = 15$ as a function of the scattering length a_{3D} for the given trap parameters of our experiment. The various curves correspond to the different approximations: gaussian solution (green dashed line), TF solution (blue dotted line), TG solution (black dash-dotted line), numerically solved GP-equation result (black stars), and Lieb-Liniger solution with local density approximation (blue circles). For the data analysis the continuous red line is used.

Density profiles

The density profiles for the individual tubes with index (i, j) depend strongly on the strength of interactions and the occupation number $N_{i,j}$. Fig. 4 compares the results for the integrated density profiles $\int n_{i,j}^3(\mathbf{r}) d^3r$ using the different approximations to calculate the profile (gaussian, TF, TG, numerically solved GP-equation, and Lieb-Liniger solution within the local density approximation [3]) for the specific case of $N_{i,j} = 15$. For our analysis of the experimental data we use the GP result for weak interactions and the TG result [4] for strong interactions (continuous red line).

Secondary loss processes

Here we estimate the deviation $\Delta\alpha$ from $\alpha = 3$ in the rate equation $\dot{n} = -\alpha K^{(3)} g^{(3)} n^3$ due to secondary loss processes [5, 6]. Within a simple simulation, we determine an upper bound for the correction to the data of the 3D loss experiment of Fig. 1(b) and show that secondary loss processes cannot explain our results for $g_{th}^{(3)}/g_{BEC}^{(3)}$. In fact for our experimental trap parameters and atom numbers secondary processes would result in an *increase* of $g_{th}^{(3)}/g_{BEC}^{(3)}$ with increasing interaction strength, in contradiction with the observed behavior.

A secondary collision is caused by the collision of the dimer and/or free atom from a three-body recombination process with other atoms while leaving the trap, triggering additional losses. We estimate the average number of secondary collisions in our experiment by determining numerically the collisional opacity $\langle nl \rangle \sigma$ for the products of a three-body recom-

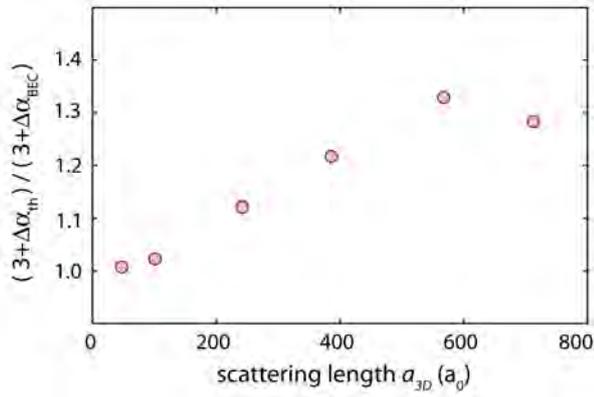


FIG. 5: (color online) Upper estimate for the corrections due to secondary loss. For details see text.

bination event. Here $\langle nl \rangle$ is the average column density, with l the distance covered by a (randomly chosen) atom leaving the trap, and σ is the scattering cross section. For the atom-atom cross section we use the formula $\sigma = 8\pi a_{3D}^2 / (1 + k^2 a_{3D}^2)$, where $\hbar k$ is the momentum of the free atom gained in the recombination event. For the atom-dimer collision, we use a similar expression for the cross section, with the momen-

tum of the dimer and a scattering length $2a_{3D}$. For our experimental parameters, we then determine the total number of atoms lost due to secondary processes for a thermal sample, $\Delta\alpha_{th}$, and a BEC, $\Delta\alpha_{BEC}$. Figure 5 shows that the ratio $(3 + \Delta\alpha_{th}) / (3 + \Delta\alpha_{BEC})$ increases with increasing a_{3D} by about 30 percent over the experimentally accessible range of a_{3D} . These results imply that for our experimental parameters secondary loss processes would result in an increase of the ratio $g_{th}^{(3)} / g_{BEC}^{(3)}$ in Fig. 1(b), in contrast to the measured data. Thus, within the present model, this rules out secondary loss processes as the cause of the effects shown in the present work.

-
- [1] D.S. Petrov, M. Holzmann, and G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **84**, 2551 (2000).
 - [2] M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
 - [3] V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, Phys. Rev. Lett. **86**, 5413 (2001).
 - [4] C. Menotti and S. Stringari, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002).
 - [5] J. Schuster *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 170404 (2001).
 - [6] M. Zaccanti *et al.*, Nature. Phys. **5**, 586 (2009).

ANHANG B

Matlab Codes

B.1 Lösung der Lieb-Liniger Integralgleichung

```

function gamma = calcLambda2Gamma( lambda )

% solves Lieb-Liniger integral equation

% apply Simpson rule to Integral
% get system of linear equations

%*****
% discret steps dx
%*****
n = 1000;
dx = 1/n;
j = 1 : 2*n+1;
xj = -1 +(j-1)*dx;
yj = -1 +(j-1)*dx;
[X,Y] = meshgrid(xj,yj);

%*****
% define function K(x-y) as a matrix
%*****

A = zeros(length(X));
for i = 1: 2*n : 2*n+1
    A(i,i) = 1;
end
for i = 2 : 2 : 2*n
    A(i,i) = 4;
end
for i = 3 : 2 : 2*n-1
    A(i,i) =2;
end

lambda_mat = lambda* ones(length(X));
M = 1./(lambda_mat.^2 + (X-Y).^2)*A ;

%*****

```

B Matlab Codes

```
%% solve L*g = r; % equation
L = eye(2*n+1) - lambda_mat*dx/(3*pi).* M;
r = 1/(2*pi) *ones(length(j),1);
g = L \ r;
%*****

% equation:(3.20)

gamma = lambda/(sum(g)*dx);

% equation (3.19):
e = gamma^3/lambda^3 * sum(g.*(xj').^2)*dx

end
```

B.2 Dichteprofil des LL-Gases in LDA

```
function profile = LL_density(N,scat,wz,omega_perp)

% 02.05.2011 Mohamed
% Berchnet exaktes Dichteprofil einer Röhre nach Lieb-Liniger für Streulängen zwischen
% a=1 und ca. 1200 a0

% N = Teilchenzahl
% scat = Streulänge in a0
% wz = longitudinale Fallenfrequenz in z-Richtung
% omega_perp = radialer Einschluss

hbar = 1.05457148*10^(-34);
mCs = 132.9 * 1.6605*10^(-27);
aho = sqrt(hbar/mCs/omega_perp);
a0 = 0.0529177 * 10^(-9);
az = sqrt(hbar/mCs/wz);

aina0 = scat;
data = load('data5.txt');
gamma = data(:,2);
mu_n2 = data(:,5);

a1D = (-aho^2/(aina0*a0))*( 1-1.0326*(aina0*a0/aho) );
g1D = -hbar^2/(mCs/2)/a1D;

ZTG=sqrt(2*N)*az ; % TG- Radius
dz = ZTG/1000;
z=-2*ZTG:dz:2*ZTG;

V = 1/2*mCs*wz^2*z.^2;
mu_TF = ( 3*N*g1D*wz*sqrt(mCs)/4/sqrt(2) ) ^ (2/3); % TF chemical potential
```

B.2 Dichteprofil des LL-Gases in LDA

```

if aina0*a0 < sqrt(wz/omega_perp*N)*aho           % Anfangswert für b
    mu0 = mu_TF;
    disp('Thomas-Fermi_regime');
else
    mu0 = hbar^2/2/mCs*pi^2*(sqrt(2*N)/pi/az)^2;
    disp('Tonks_regime');
end

A = mu_n2./gamma.^2;
mu2gamma = mCs*g1D^2/2/hbar^2 * A;
%plot(gamma,mu2gamma,'.')
f = fitype('pchipinterp');
fit1 = fit(mu2gamma,gamma,f);
%plot(fit1,mu2gamma,gamma)

[mu,fval] = fzero(@(mu) atomcheck(N,hbar,g1D,mCs,mu,gamma,mu2gamma,V,z,dz),mu0,...
optimset('Tolx',1e-50) )

mu_loc = max(0,mu - V);
f = fitype('pchipinterp');
fit1 = fit(mu2gamma,gamma,f);
gamma_loc = fit1(mu_loc);
n_loc = mCs*g1D/hbar^2./gamma_loc;
plot(z,n_loc,'.')

%*****
% TG regime
ZTG=sqrt(2*N)*az ; % TG- Radius
dz = ZTG/1000;
z=-ZTG:dz:ZTG;
n_TG= sqrt(2*N)/pi/az*sqrt(1-z.^2/ZTG^2); %TG-Profil
hold on
plot(z,n_TG,'r--','Linewidth',2)
%*****

%*****
% TF regime
mu_TF = ( 3*N*g1D*wz*sqrt(mCs)/4/sqrt(2) )^(2/3); % TF chemical potential
n_TF0 = mu_TF/g1D; %Thomas Fermi central density
R_TF = sqrt( 2*mu_TF/mCs/wz^2 ); % TF_ Radius
dz = R_TF/1000;
z = -R_TF:dz:R_TF;
n_TF = n_TF0*(1-z.^2/R_TF^2);
hold on
plot(z,n_TF,'g-.','Linewidth',2)
%*****

end

```

B Matlab Codes

```
*****  
function ret = atomcheck(N,hbar,g1D,mCs,mu,gamma,mu2gamma,V,z,dz)  
  
% diese Funktion kontrolliert die Normierung des Dichteprofiles  
  
mu_loc = max(0,mu - V);  
  
f = fitype('pchipinterp');  
fit1 = fit(mu2gamma,gamma,f);  
gamma_loc = fit1(mu_loc);  
n_loc = mCs*g1D/hbar^2./gamma_loc;  
%plot(z,n_loc)  
check = sum(n_loc)*dz;  
ret = check - N  
  
end  
*****
```

Literaturverzeichnis

- [And95] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein condensation in dilute atomic vapor*, Science **269**, 198 (1995).
- [Arm10] J. Armijo, T. Jacqmin, K. V. Kheruntsyan, and I. Bouchoule, *Probing Three-Body Correlations in a Quantum Gas Using the Measurement of the Third Moment of Density Fluctuations*, Phys. Rev. Lett. **105**, 230402 (2010).
- [Ast04] G. E. Astrakharchik, D. Blume, S. Giorgini, and B. Granger, *Quantum Monte Carlo study of quasi-one-dimensional Bose gases*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 205 (2004).
- [Atk89] K. A. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.)*, John Wiley and Sons, 1989.
- [Bag87] V. Bagnato, D. E. Pritchard, and D. Kleppner, *Bose-Einstein condensation in an external potential*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987).
- [Bak09] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, and M. Greiner, *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice*, Nature **462**, 74 (2009).
- [Bay96] G. Baym and C. J. Pethick, *Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas*, Phys. Rev. Lett. **76**, 6 (1996).
- [Ber03] T. Bergeman, M. G. Moore, and M. Olshanii, *Atom-Atom Scattering under Cylindrical Harmonic Confinement: Numerical and Analytic Studies of the Confinement Induced Resonance*, Phys. Rev. Lett. **91**, 163201 (2003).
- [Bet31] H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Phys. **71**, 205 (1931).
- [Blo08] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Many-body physics with ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
- [Blu11] C. Blumenstein, J. Schäfer, S. Mietke, S. Meyer, A. Dollinger, M. Lochner, X. Y. Cui, L. Patthey, R. Matzdorf, and R. Claessen, *Atomically controlled quantum chains hosting a Tomonaga-Luttinger liquid*, Nature Physics (2011).
- [Bra95] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).

Literaturverzeichnis

- [Bur97] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Coherence, Correlations, and Collisions: What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay*, Phys. Rev. Lett. **79**, 337 (1997).
- [Cal71] F. Calogero, *Solution of the One-Dimensional N-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials*, J. Math. Phys. **12**, 419 (1971).
- [Caz04] M. A. Cazalilla, *Bosonizing one-dimensional cold atomic gases*, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics **37**, S1 (2004).
- [Caz10] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, *One dimensional Bosons: From Condensed Matter Systems to Ultracold Gases*, accepted for publication in Rev. Mod. Phys. (2011), preprint at arXiv:0811.0695 (2010).
- [Che06] V. V. Cheianov, H. Smith, and M. B. Zvonarev, *Exact results for three-body correlations in a degenerate one-dimensional Bose gas*, Phys. Rev. A **73**, 051604 (2006).
- [Che10] Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, and K. Levin, *BCS-BEC crossover: From high-temperature superconductors to ultracold superfluids*, Phys. Rep. **412**, 1–88 (2010).
- [Chi01] C. Chin, *Cooling, Collisions and Coherence of Cold Cesium Atoms in a Trap*, Ph.D. thesis, Stanford University (2001).
- [Chi04] C. Chin, V. Vuletić, A. J. Kerman, S. Chu, E. Tiesinga, P. J. Leo, and C. J. Williams, *Precision Feshbach spectroscopy of ultracold Cs₂*, Phys. Rev. A **70**, 032701 (2004).
- [Chi10] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Feshbach resonances in ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [Cor06] S. L. Cornish, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, *Formation of Bright Matter-Wave Solitons during the Collapse of Attractive Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **96**, 170401 (2006).
- [Dal99] J. Dalibard, *Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases*, in: M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (Eds.), *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, 321, IOS Press, 1999.
- [Dav95] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [Dre96] M. Dressel, A. Schwartz, G. Grüner, and L. Degiorgi, *Deviations from Drude Response in Low-Dimensional Metals: Electrodynamics of the Metallic State of (TMTSF)₂PF₆*, Phys. Rev. Lett. **77**, 398 (1996).

- [Dun01] V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, *Bosons in Cigar-Shaped Traps: Thomas-Fermi Regime, Tonks-Girardeau Regime, and In Between*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5413 (2001).
- [Fan35] U. Fano, *Sullo spettro di assorbimento dei gas nobili presso il limite dello spettro d'arco*, Nuovo Cimento **12**, 154 (1935).
- [Fan61] U. Fano, *Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts*, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [Fed96] P. O. Fedichev, M. W. Reynolds, and G. V. Shlyapnikov, *Three-Body Recombination of Ultracold Atoms to a Weakly Bound s Level*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2921 (1996).
- [Fes58] H. Feshbach, *Unified Theory of Nuclear Reactions. I*, Ann. Phys. **5**, 337 (1958).
- [Fes62] H. Feshbach, *Unified Theory of Nuclear Reactions. II*, Ann. Phys. **19**, 287 (1962).
- [Fey39] R. P. Feynman, *Forces in Molecules*, Phys. Rev. **56**, 340 (1939).
- [Flir06] A. Flir, *Implementierung und Untersuchung von Raman-Seitenbandkühlung zur Erzeugung eines ultrakalten Cäsiumgases*, Diploma thesis, University of Innsbruck (2006), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Gan03] D. M. Gangardt and G. V. Shlyapnikov, *Stability and Phase Coherence of Trapped 1D Bose Gases*, Phys. Rev. Lett. **90**, 010401 (2003).
- [Gia04] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension*, Oxford University Press, 2004.
- [Gir60] G. Girardeau, *Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension*, J. Math. Phys. **1** (1960).
- [Gus08] M. Gustavsson, *A quantum gas with tunable interactions in an optical lattice*, Phd thesis, Universität Innsbruck (2008), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Hal81] F. D. M. Haldane, *Effective Harmonic-Fluid Approach to Low-Energy Properties of One-Dimensional Quantum Fluids*, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981).
- [Hal09] E. Haller, M. Gustavsson, M. J. Mark, J. G. Danzl, R. Hart, G. Pupillo, and H.-C. Nägerl, *Realization of an Excited, Strongly Correlated Quantum Gas Phase*, Science **325**, 1224 (2009).
- [Hal10a] E. Haller, R. Hart, M. J. Mark, J. G. Danzl, L. Reichsöllner, M. Gustavsson, M. Dalmonte, G. Pupillo, and H.-C. Nägerl, *Pinning quantum phase transition for a Luttinger liquid of strongly interacting bosons*, Nature **466**, 597 (2010).

Literaturverzeichnis

- [Hal10b] E. Haller, M. J. Mark, R. Hart, J. G. Danzl, L. Reichsöllner, V. Melezhik, P. Schmelcher, and H.-C. Nägerl, *Confinement-Induced Resonances in Low-Dimensional Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **104**, 153203 (2010).
- [HB56] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Correlation between photons in two coherent beams of light*, Nature **177**, 27 (1956).
- [Iij91] S. Iijima, *Helical microtubules of graphitic carbon*, Nature **354**, 56 (1991).
- [Jak98] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).
- [Kag85] Y. Kagan, B. V. Svistunov, and G. Shlyapnikov, *Effect of Bose condensation on inelastic processes in gases*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **42** (1985).
- [Ker00] A. J. Kerman, V. Vuletić, C. Chin, and S. Chu, *Beyond Optical Molasses: 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density*, Phys. Rev. Lett. **84**, 439 (2000).
- [Khe03] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov, *Pair Correlations in a Finite-Temperature 1D Bose Gas*, Phys. Rev. Lett. **91**, 040403 (2003).
- [Kin04] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas*, Science **305**, 1125 (2004).
- [Köh04] T. Köhl, H. Stöferle, C. Moritz, Schori, and T. Esslinger, *1D Bose gases in an optical lattice*, Applied Physics B: Lasers and Optics **79**, 1009 (2004).
- [Köh06] T. Köhler, K. Góral, and P. S. Julienne, *Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances*, Rev. Mod. Phys. **78**, 1311 (2006).
- [Kop07] G. R. Kopeinig, *A Tunable Bose-Einstein Condensate in a Three-dimensional Optical Lattice Potential*, Master's thesis, University of Innsbruck (2007), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Kor11] M. Kormos, Y.-Z. Chou, and A. Imambekov, *Exact three-body local correlations for arbitrary excited states of the 1D Bose gas*, preprint at arXiv:1108.0145v1 (2011).
- [Kra04] T. Kraemer, J. Herbig, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Optimized production of a cesium Bose-Einstein condensate*, Applied Physics B: Lasers and Optics **79**, 1013 (2004).
- [Kra06] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. Lange, K. Pilch, A. Jaakola, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms*, Nature **440**, 315 (2006).
- [Kuh10] E. D. Kuhnle, H. Hu, X.-J. Liu, P. Dyke, M. Mark, P. D. Drummond, P. Hannaford, and C. J. Vale, *Universal Behavior of Pair Correlations in a Strongly Interacting Fermi Gas*, Phys. Rev. Lett. **105**, 070402 (2010).

- [Lan57a] L. D. Landau, *Oscillations in a Fermi-liquid*, Sov. Phys. JETP **5**, 336 (1957).
- [Lan57b] L. D. Landau, *Theory of Fermi-liquid*, Sov. Phys. JETP **3**, 920 (1957).
- [Lan59] L. D. Landau, *On the theory of the Fermi-liquid*, Sov. Phys. JETP **8**, 70 (1959).
- [Lan80] L. Landau and T. M. Lifshitz, *Statistische Physik*, Akademie-Verlag Berlin, 1980.
- [Lie63a] E. H. Lieb, *Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum*, Phys. Rev. **130**, 1616 (1963).
- [Lie63b] E. H. Lieb and W. Liniger, *Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State*, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).
- [Lut63] J. M. Luttinger, *An Exactly Soluble Model of a Many-Fermion System*, Journal of Mathematical Physics **4**, 1154 (1963).
- [Mar07a] M. Mark, F. Ferlaino, S. Knoop, J. G. Danzl, T. Kraemer, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Spectroscopy of ultracold trapped cesium Feshbach molecules*, Phys. Rev. A **76**, 042514 (2007).
- [Mar07b] M. J. Mark, *Wechselwirkungseffekte eines Cäsium-BEC in eindimensionalen Gittern*, Diploma thesis, Universität Innsbruck (2007), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Men02] C. Menotti and S. Stringari, *Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas*, Phys. Rev. A **66**, 043610 (2002).
- [Met99] H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser cooling and trapping*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Nav11] N. Navon, S. Piatecki, K. J. Günter, B. Rem, T. C. Nguyen, F. Chevy, W. Krauth, and C. Salomon, *Dynamics and Thermodynamics of the Low-Temperature Strongly Interacting Bose Gas*, accepted for publication in Phys. Rev. Lett. (2011), preprint at arXiv:1103.4449 (2011).
- [Ols98] M. Olshanii, *Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons*, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [Pet07] D. Petrov, D. Gangardt, and G. V. Shlyapnikov, *Low-dimensional trapped gases*, J. Phys. IV France **1**, 1 (2007).
- [Pit98] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Elementary Excitations in Trapped Bose-Einstein Condensed Gases Beyond the Mean-Field Approximation*, Phys. Rev. Lett. **81**, 4541 (1998).
- [Pit03] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford University Press, 2003.

Literaturverzeichnis

- [Sch01] J. Schuster, A. Marte, S. Amtage, B. Sang, G. Rempe, and H. C. W. Beijerinck, *Avalanches in a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **87**, 170404 (2001).
- [She10] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr, *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator*, Nature **467**, 68 (2010).
- [Tim97] E. Timmermans, P. Tommasini, and K. Huang, *Variational Thomas-Fermi theory of a nonuniform Bose condensate at zero temperature*, Phys. Rev. A **55**, 3645 (1997).
- [Tol04] B. L. Tolra, K. M. O'Hara, J. H. Huckans, W. D. Phillips, S. L. Rolston, and J. V. Porto, *Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Correlated 1D Degenerate Bose Gas*, Phys. Rev. Lett. **92**, 190401 (2004).
- [Tom50] S. Tomonaga, *Remarks on Bloch's Method of Sound Waves applied to Many-Fermion Problems*, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).
- [Unt05] P. Unterwaditzer, *Aufbau eines vollständigen Diodenlasersystems zur Laserkühlung und Detektion von gespeicherten Cs-Atomen*, Diploma thesis, University of Innsbruck (2005), download: <http://www.ultracold.at>.
- [Vai79] H. G. Vaidya and C. A. Tracy, *One-Particle Reduced Density Matrix of Impenetrable Bosons in One Dimension at Zero Temperature*, Phys. Rev. Lett. **42**, 3 (1979).
- [Wan99] X.-Z. Wang and J. Sam Kim, *Yang-Lee zeros of one-dimensional quantum many-body systems*, Phys. Rev. E **59**, 222 (1999).
- [Web03] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Three-Body Recombination at Large Scattering Lengths in an Ultracold Atomic Gas*, Phys. Rev. Lett. **91**, 123201 (2003).
- [Xu06] K. Xu, Y. Liu, D. E. Miller, J. K. Chin, W. Setiawan, and W. Ketterle, *Observation of Strong Quantum Depletion in a Gaseous Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **96**, 180405 (2006).
- [Yan69] C. N. Yang and C. P. Yang, *Thermodynamics of a One-Dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-Function Interaction*, Journal of Mathematical Physics **10**, 1115 (1969).